

CAPÍTULO 3

Espacios vectoriales

1. Definición y ejemplos de espacio vectorial

En el capítulo 1, a partir de un cuerpo K y dos enteros positivos m y n , hemos definido el conjunto $M_{m \times n}(K)$ de las matrices con m filas, n columnas y términos en K . Asimismo, a partir de las operaciones $+$ y \cdot del cuerpo K , hemos definido la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz, y hemos comprobado que cumplen una serie de propiedades entre las que nos interesa ahora señalar las siguientes:

- La suma de matrices constituye una operación binaria interna en $M_{m \times n}(K)$ que cumple la propiedad conmutativa, la asociativa, para la que existe elemento neutro y para la que todo elemento tiene opuesto, es decir, la suma constituye una aplicación del tipo:

$$\begin{aligned} + : M_{m \times n}(K) \times M_{m \times n}(K) &\longrightarrow M_{m \times n}(K) \\ (A, B) &\longmapsto A + B \end{aligned}$$

para la que se cumple:

- $A + B = B + A \quad \forall A, B \in M_{m \times n}(K)$
 - $(A + B) + C = A + (B + C) \quad \forall A, B, C \in M_{m \times n}(K)$
 - $\exists O \in M_{m \times n}(K) / A + O = A = O + A \quad \forall A \in M_{m \times n}(K)$
 - $\forall A \in M_{m \times n}(K) \quad \exists -A \in M_{m \times n}(K) / A + (-A) = O = (-A) + A$
- El producto de un escalar por una matriz es una matriz del mismo tamaño, es decir, constituye una aplicación del tipo:

$$\begin{aligned} \cdot : K \times M_{m \times n}(K) &\longrightarrow M_{m \times n}(K) \\ (\alpha, A) &\longmapsto \alpha A \end{aligned}$$

para la que se cumple:

- $a(A + B) = aA + aB \quad \forall A, B \in M_{m \times n}(K) \text{ y } \forall a \in K$
- $(a + b)A = aA + bA \quad \forall A \in M_{m \times n}(K) \text{ y } \forall a, b \in K$
- $(ab)A = a(bA) \quad \forall A \in M_{m \times n}(K) \text{ y } \forall a, b \in K$
- $1A = A \quad \forall A \in M_{m \times n}(K)$

Nuestro propósito ahora, es extender la estructura que tiene el conjunto $M_{m \times n}(K)$ con las dos operaciones antes indicadas, a un contexto más general del que éste pasará a ser un ejemplo.

Definición 1.1. Un *espacio vectorial* sobre el cuerpo K , también denominado K -espacio vectorial, es un conjunto no vacío V , junto con dos operaciones del tipo siguiente:

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V & \cdot : K \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v & (\alpha, u) &\longmapsto \alpha u \end{aligned}$$

para las que se verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ Para } + : & \begin{cases} \underline{\text{EV1}} : u + v = v + u \quad \forall u, v \in V \\ \underline{\text{EV2}} : (u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V \\ \underline{\text{EV3}} : \exists 0 \in V / u + 0 = u = 0 + u \quad \forall u \in V \\ \underline{\text{EV4}} : \forall u \in V \quad \exists -u \in V / u + (-u) = 0 = (-u) + u \end{cases} \\ \blacksquare \text{ Para } \cdot : & \begin{cases} \underline{\text{EV5}} : \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad \forall u, v \in V \text{ y } \forall \alpha \in K \\ \underline{\text{EV6}} : (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad \forall u \in V \text{ y } \forall \alpha, \beta \in K \\ \underline{\text{EV7}} : (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u) \quad \forall u \in V \text{ y } \forall \alpha, \beta \in K \\ \underline{\text{EV8}} : 1u = u \quad \forall u \in V \end{cases} \end{aligned}$$

A los elementos de V los denominaremos *vectores*, y a las dos operaciones anteriores las denominaremos, respectivamente, *suma de vectores* y *producto de un escalar por un vector*. Por otro lado, debido a la igualdad que nos garantiza EV4, cualquiera de los dos miembros de esta igualdad se representará por $u + v + w$. Asimismo, en EV7, cualquiera de los dos miembros de la igualdad se representará por $\alpha\beta u$.

Consecuencias 1.2. Si V es un K -espacio vectorial, entonces:

- 1) El elemento $0 \in V$, cuya existencia nos garantiza la condición EV3, es único y lo denominaremos *vector cero*.
- 2) Si $u \in V$, el elemento $-u \in V$, cuya existencia nos garantiza la condición EV4, es único y lo denominaremos *opuesto* de u .

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Supongamos que los elementos e_1 y e_2 de V , verifican la condición EV3, entonces:

$$e_1 + e_2 = \begin{cases} e_1 & \text{haciendo uso de la condición } \underline{\text{EV3}} \text{ para } e_2 \\ e_2 & \text{haciendo uso de la condición } \underline{\text{EV3}} \text{ para } e_1 \end{cases}$$

- 2) Supongamos que $u \in V$ y que u_1 y u_2 de V , verifican la condición EV4, entonces, haciendo uso en primer lugar de la condición EV2, se tiene:

$$u_1 + u + u_2 = \begin{cases} (u_1 + u) + u_2 = 0 + u_2 = u_2 & \text{haciendo uso de que } u_1 \text{ cumple la condición } \underline{\text{EV4}} \\ & \text{y de la condición } \underline{\text{EV3}} \\ (u_1 + (u + u_2)) = u_1 + 0 = u_1 & \text{haciendo uso de que } u_2 \text{ cumple la condición } \underline{\text{EV4}} \\ & \text{y de la condición } \underline{\text{EV3}} \end{cases}$$

□

Consecuencias 1.3. En un K -espacio vectorial V , se verifica:

- 1) $\alpha 0 = 0 \quad \forall \alpha \in K$
- 2) $0v = 0 \quad \forall v \in V$
- 3) $\alpha v = 0 \implies \alpha = 0 \text{ o } v = 0$
- 4) $(-\alpha)v = -(\alpha v) = \alpha(-v) \quad \forall v \in V, \forall \alpha \in K$

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Si consideramos el elemento de V , $\alpha(0 + 0)$, se tiene:

$$\alpha(0 + 0) = \begin{cases} \alpha 0 + \alpha 0 & \text{haciendo uso de la condición } \underline{\text{EV5}} \\ \alpha 0 & \text{ya que } 0 + 0 = 0 \text{ por la condición } \underline{\text{EV3}} \end{cases}$$

en consecuencia $\alpha 0 + \alpha 0 = \alpha 0$ y considerando ahora el elemento $-(\alpha 0) \in V$, cuya existencia nos garantiza la condición EV4, se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha 0 + \alpha 0 = \alpha 0 &\implies -(\alpha 0) + (\alpha 0 + \alpha 0) = -(\alpha 0) + \alpha 0 \xrightarrow{\underline{\text{EV2}}} \\ (- (\alpha 0) + \alpha 0) + \alpha 0 &= -(\alpha 0) + \alpha 0 \xrightarrow{\underline{\text{EV4}}} 0 + \alpha 0 = 0 \xrightarrow{\underline{\text{EV3}}} \alpha 0 = 0 \end{aligned}$$

- 2) Si consideramos el elemento de V , $(0 + 0)v$, se tiene:

$$(0 + 0)v = \begin{cases} 0v + 0v & \text{haciendo uso de la condición } \underline{\text{EV6}} \\ 0v & \text{haciendo uso de la definición de neutro de la suma en } K \end{cases}$$

en consecuencia $0v + 0v = 0v$ y considerando ahora el elemento $-(0v) \in V$, cuya existencia nos garantiza la condición EV4, se tiene:

$$\begin{aligned} 0v + 0v = 0v &\implies -(0v) + (0v + 0v) = -(0v) + 0v \xrightarrow{\underline{\text{EV2}}} \\ (- (0v) + 0v) + 0v &= -(0v) + 0v \xrightarrow{\underline{\text{EV4}}} 0 + 0v = 0 \xrightarrow{\underline{\text{EV3}}} 0v = 0 \end{aligned}$$

- 3) Supongamos $\alpha v = 0$ y $\alpha \neq 0$, entonces, puesto que existe $\alpha^{-1} \in K$, tenemos:

$$\alpha v = 0 \implies \alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}0 = 0 \xrightarrow{\underline{\text{EV7}}} (\alpha^{-1}\alpha)v = 0 \implies 1v = 0 \xrightarrow{\underline{\text{EV8}}} v = 0$$

- 4) Para justificar que $(-\alpha)v = -(\alpha v)$, basta ver que $(-\alpha)v + \alpha v = 0$, lo cual se cumple ya que, haciendo uso de la condición EV6, así como de uno de los apartados anteriores, se tiene:

$$(-\alpha)v + \alpha v = (-\alpha + \alpha)v = 0v = 0$$

Y la otra igualdad se demuestra de forma análoga.

□

Nota 1.4. A una suma de vectores de la forma $u + (-v)$, es decir, la suma de un vector u y el opuesto de v , la representaremos simplemente por $u - v$.

Ejemplos 1.5.

1. El conjunto $M_{m \times n}(K)$ para la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz, tiene estructura de K -espacio vectorial.
2. Si n es un entero positivo, el producto cartesiano $K^n = K \times \dots \times K$, tiene estructura de K -espacio vectorial para las operaciones siguientes:

$$\begin{cases} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) & \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n \\ \alpha (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \dots, \alpha\alpha_n) & \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n \text{ y } \forall \alpha \in K \end{cases}$$

La justificación es inmediata y análoga a la que corresponde al K -espacio vectorial $M_{1 \times n}(K)$.

3. Si X es un conjunto no vacío, el conjunto K^X , formado por todas las aplicaciones de X en K , tiene estructura de K -espacio vectorial para las operaciones siguientes:

$$\begin{cases} f + g : X \rightarrow K & \text{definida según } (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall f, g \in K^X \\ \alpha f : X \rightarrow K & \text{definida según } (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in K^X \text{ y } \forall \alpha \in K \end{cases}$$

La justificación se deriva, de forma inmediata, de las propiedades de la suma y producto en K .

2. Subespacios vectoriales

En el resto del capítulo, V representará un K -espacio vectorial.

Definición 2.1. Un subconjunto no vacío H de V , diremos que es *subespacio vectorial* de V , o simplemente *subespacio* de V , y lo representaremos por $H \leq V$, si la restricción a H de las dos operaciones para las que V es K -espacio vectorial, hacen de H un K -espacio vectorial.

Proposición 2.2. (*Teorema de caracterización de subespacios*) Para un subconjunto no vacío H de V , las dos condiciones siguientes son equivalentes:

- 1) $H \leq V$
- 2) $\alpha u + \beta v \in H \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in H$

DEMOSTRACIÓN.

1) \implies 2): Por ser H subespacio vectorial de V el producto de un escalar por un vector de H es un vector de H , y por tanto $\alpha u \in H$ y $\beta v \in H$. Asimismo, la suma de vectores de H es de nuevo un vector de H y por consiguiente $\alpha u + \beta v \in H$.

2) \implies 1): Veamos en primer lugar que la suma de vectores de H es de nuevo un vector de H , y el producto de un escalar por un vector de H es también un vector de H . En efecto, haciendo uso de la definición de V como K -espacio vectorial, 1.1, y sus consecuencias, 1.2 y 1.3, tenemos:

- $\forall u, v \in H \quad u + v = 1u + 1v \in H$, aplicando la condición 2) a $1 \in K$ y $u, v \in H$.
- $\forall \alpha \in K, \forall u \in H \quad \alpha u = \alpha u + 0u \in H$, aplicando la condición 2) a $\alpha, 0 \in K$ y $u \in H$.

Con todo esto, la restricción a H de las dos operaciones que hacen de V un K -espacio vectorial, son operaciones del tipo siguiente, que seguiremos representando por $+$ y \cdot , respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} + : H \times H & \longrightarrow & H \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot : K \times H & \longrightarrow & H \\ (\alpha, u) & \longmapsto & \alpha u \end{array}$$

En relación con las ocho condiciones que hemos de comprobar para justificar que H , con estas dos operaciones, tiene estructura de K -espacio vectorial, es inmediato que EV1, EV2, EV5, EV6, EV7 y EV8 se cumplen, comprobemos pues las condiciones EV3 y EV4:

- EV3: Puesto que H es no vacío, si $u \in H$, tenemos que $0 = u - u = 1u + (-1)u \in H$, aplicando la condición 2) a $1, -1 \in K$ y $u \in H$. Por consiguiente, $0 \in H$ y se cumple EV3.
- EV4: $\forall u \in H$ tenemos que $-u = (-1)u + 0u \in H$, aplicando la condición 2) a $-1, 0 \in K$ y $u \in H$. Por consiguiente, $-u \in H$ y se cumple EV4.

□

Nota 2.3. Notemos que de la demostración anterior se desprende que el vector cero de un espacio vectorial V pertenece a cualquier subespacio de V .

Ejemplos 2.4.

1. $V \leq V$ y $\{0\} \leq V$. La justificación es inmediata.

2. El conjunto de soluciones de un SEL homogéneo sobre K , con m ecuaciones y n incógnitas, es un subespacio vectorial del K -espacio vectorial K^n , visto en 1.5, página 63.

En efecto, consideremos el siguiente SEL homogéneo, expresado en una de las formas matriciales vistas:

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \cdots + x_n C_n = O$$

donde $C_1, C_2, \dots, C_n, O \in M_{m \times 1}(K)$. Sabemos que es un SEL compatible y que su conjunto de soluciones es el subconjunto no vacío de K^n :

$$H = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n \mid \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n = O\}$$

Haciendo uso de las operaciones vistas para $M_{m \times 1}(K)$, se tiene que $H \leq K^n$ ya que, $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in H$, entonces:

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \beta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1, \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2, \dots, \alpha\alpha_n + \beta\beta_n) \in K^n$$

y se cumple:

$$\begin{aligned} &(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)C_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)C_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)C_n = \cdots \\ &\cdots = \alpha(\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n) + \beta(\beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \cdots + \beta_n C_n) = \alpha O + \beta O = O \end{aligned}$$

por lo que $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \beta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in H$.

3. El subconjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0, x - y + z = 0\}$ es un subespacio vectorial del \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^3 , visto en 1.5, página 63, para $K = \mathbb{R}$ y $n = 3$.

En efecto, se trata del conjunto de soluciones de un SEL homogéneo de 2 ecuaciones con 3 incógnitas sobre el cuerpo \mathbb{R} . También puede justificarse utilizando el teorema de caracterización anterior.

4. El conjunto $H = \{A \in M_n(K) \mid A^T = A\}$ es un subespacio del K -espacio vectorial de las matrices cuadradas $M_n(K)$, visto en 1.5, página 63. A las matrices que verifican la condición $A^T = A$ se las denomina *simétricas* y son necesariamente cuadradas.

En efecto, se trata obviamente de un subconjunto no vacío de $M_n(K)$ puesto que tanto la matriz nula como la matriz identidad pertenecen a H . Además, es inmediato que $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall A, C \in H$, se verifica:

$$(\alpha A + \beta C)^T = \alpha A^T + \beta C^T = \alpha A + \beta C$$

por lo que $\alpha A + \beta C \in H$.

3. Operaciones con subespacios

Proposición 3.1. En un K -espacio vectorial V se cumple:

- 1) Si $\{H_i / i \in I\}$ es una familia no vacía de subespacios de V , entonces su intersección, $\bigcap_{i \in I} H_i$, es un subespacio vectorial de V .
- 2) Si H_1, \dots, H_n son subespacios de V , entonces el siguiente conjunto es un subespacio vectorial de V :

$$H_1 + \dots + H_n = \{u_1 + \dots + u_n / u_i \in H_i \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Puesto que el vector cero de V pertenece a cualquier subespacio de V , se tiene $0 \in \bigcap_{i \in I} H_i$ y por tanto esta intersección es un subconjunto no vacío de V . Además, $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall u, v \in \bigcap_{i \in I} H_i$, se tiene que $u, v \in H_i \forall i \in I$ y, puesto que $H_i \leq V$, entonces $\alpha u + \beta v \in H_i \forall i \in I$ y, por consiguiente, $\alpha u + \beta v \in \bigcap_{i \in I} H_i$.
- 2) Tal y como hemos indicado en el apartado anterior, el vector cero de V pertenece a cada uno de los subespacios H_1, \dots, H_n y por consiguiente $0 = 0 + \dots + 0 \in H_1 + \dots + H_n$ y éste es un subconjunto no vacío de V . Además, $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall u_1 + \dots + u_n, v_1 + \dots + v_n \in H_1 + \dots + H_n$, haciendo uso de las propiedades de V y de que cada H_i es subespacio, se tiene:

$$\alpha(u_1 + \dots + u_n) + \beta(v_1 + \dots + v_n) = (\alpha u_1 + \beta v_1) + \dots + (\alpha u_n + \beta v_n) \in H_1 + \dots + H_n$$

□

Definición 3.2. Los subespacios considerados en la proposición anterior se denominan, respectivamente, *subespacio intersección* de la familia no vacía de subespacios de V , $\{H_i / i \in I\}$, y *subespacio suma* de los subespacios H_1, \dots, H_n de V . En particular, la suma de subespacios $H_1 + \dots + H_n$ diremos que es *directa*, y lo expresaremos por $H_1 \oplus \dots \oplus H_n$, si la expresión que hemos obtenido del vector cero como suma de un vector de cada H_i es la única posible, es decir, si se cumple la siguiente implicación:

$$0 = u_1 + \dots + u_n \quad \text{con } u_1 \in H_1, \dots, u_n \in H_n \implies u_1 = \dots = u_n = 0$$

Proposición 3.3.

- 1) En $H_1 \oplus \dots \oplus H_n$, si $u_1, v_1 \in H_1, \dots, u_n, v_n \in H_n$, entonces:

$$u_1 + \dots + u_n = v_1 + \dots + v_n \implies u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n$$

- 2) La suma de dos subespacios, H y T , es directa si y sólo si $H \cap T = \{0\}$

DEMOSTRACIÓN.

- 1) En efecto, haciendo uso de la definición y consecuencias de K -espacio vectorial, así como de la definición de suma directa, tenemos:

$$\begin{aligned} u_1 + \cdots + u_n = v_1 + \cdots + v_n &\implies (u_1 - v_1) + \cdots + (u_n - v_n) = 0 \implies \\ &\implies u_1 - v_1 = 0, \dots, u_n - v_n = 0 \implies u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n \end{aligned}$$

- 2) En efecto, si suponemos que la suma es directa y consideramos un elemento $u \in H \cap T$, entonces es inmediato que $u + (-u) = 0$, con $u \in H$ y $-u \in T$, por lo que necesariamente $u = -u = 0$.

Recíprocamente, si suponemos que en la intersección $H \cap T$ sólo está el vector cero, y consideramos $u \in H$ y $v \in T$ de manera que $u + v = 0$, entonces se tiene que $u = -v$ y, por consiguiente $u \in H \cap T = \{0\}$, de donde $u = 0$ y $v = -u = 0$, de donde se desprende que la suma $H + T$ es directa.

□

Definición 3.4. Si S es un subconjunto de V , representaremos por $\langle S \rangle$ a la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S . Obviamente la familia de estos subespacios no es vacía ya que al menos contiene a V . Además, $\langle S \rangle$ resulta ser *el menor* (para la relación de orden que define la inclusión) *subespacio de V que contiene a S* . A este subespacio lo denominaremos *subespacio generado por S* y diremos asimismo que S genera el subespacio $\langle S \rangle$. En particular, si $\langle S \rangle = V$, diremos que S es un *sistema generador de V* .

Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, al subespacio $\langle S \rangle = \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle$ lo representaremos simplemente por $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.

Consecuencias 3.5.

- 1) $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$
- 2) $H \leq V \implies \langle H \rangle = H$ (En particular $\langle V \rangle = V$)
- 3) $S \subseteq H \leq V \implies \langle S \rangle \subseteq H$
- 4) Si $v \in S$ y $v \in \langle S - \{v\} \rangle$, entonces $\langle S \rangle = \langle S - \{v\} \rangle$.

DEMOSTRACIÓN.

- 1) La inclusión $\{0\} \subseteq \langle \emptyset \rangle$ se deriva de que el vector cero de V pertenece a cualquier subespacio de V y por tanto en particular a $\langle \emptyset \rangle$. La inclusión $\langle \emptyset \rangle \subseteq \{0\}$ es consecuencia de que $\{0\}$ es subespacio de V , que contiene al subconjunto \emptyset de V , y por consiguiente está incluido en la intersección de todos los subespacios de V que contienen a \emptyset , es decir $\langle \emptyset \rangle$.

- 2) La inclusión $H \subseteq \langle H \rangle$ se desprende de la definición de $\langle H \rangle$. La inclusión $\langle H \rangle \subseteq H$, es consecuencia de que H es subespacio vectorial de V que contiene a H .
- 3) Es consecuencia inmediata de la definición de $\langle S \rangle$.
- 4) Puesto que $S - \{v\} \subseteq S$, de la definición de subespacio generado por un conjunto se deriva la inclusión $\langle S - \{v\} \rangle \subseteq \langle S \rangle$. Por otro lado, haciendo uso del apartado anterior, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} S - \{v\} \subseteq \langle S - \{v\} \rangle \\ v \in \langle S - \{v\} \rangle \end{array} \right\} \implies S \subseteq \langle S - \{v\} \rangle \implies \langle S \rangle \subseteq \langle S - \{v\} \rangle$$

□

Proposición 3.6. Si $v, v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, entonces:

- 1) $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in K\}$.
- 2) $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in K \text{ para } 1 \leq i \leq n \right\}$

DEMOSTRACIÓN.

- 1) La inclusión $\{\alpha v \mid \alpha \in K\} \subseteq \langle v \rangle$ se deriva directamente de que $\langle v \rangle$ es subespacio vectorial y $v \in \langle v \rangle$.

Para justificar la otra inclusión, es suficiente justificar que $\{\alpha v \mid \alpha \in K\}$ es subespacio vectorial de V y que $v \in \{\alpha v \mid \alpha \in K\}$. Esto último es inmediato ya que $v = 1v$. Además, de aquí se tiene que $\{\alpha v \mid \alpha \in K\}$ es un subconjunto no vacío de V y, si $\lambda, \mu \in K$ y $\alpha v, \beta v \in \{\alpha v \mid \alpha \in K\}$, entonces:

$$\lambda(\alpha v) + \mu(\beta v) = (\lambda\alpha + \mu\beta)v \in \{\alpha v \mid \alpha \in K\}$$

- 2) La segunda igualdad es consecuencia del apartado anterior y de la definición de suma de subespacios, vista en 3.2, página 66.

La inclusión $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle \subseteq \langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle$ de la primera igualdad, es consecuencia de que $\langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle$ es subespacio vectorial de V y, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, se verifica $v_i = 0v_1 + \dots + 1v_i + \dots + 0v_n \in \langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle$.

Finalmente, haciendo uso de la definición de suma de subespacios y del apartado 1), se tiene que un elemento arbitrario de la suma $\langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle$, es de la forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ y, por consiguiente, pertenece al subespacio $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.

□

Corolario 3.7. Si $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, entonces:

$$\langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_j, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_i + \mu v_j, \dots, v_j, \dots, v_n \rangle$$

para $1 \leq i \neq j \leq n$ y $\forall \lambda \in K, \lambda \neq 0$, y $\forall \mu \in K$.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar la primera igualdad, teniendo en cuenta la proposición anterior es suficiente justificar que $\langle v_i \rangle = \langle \lambda v_i \rangle$, donde λ es un escalar no nulo. Y para justificar esta igualdad, haciendo uso de 3.5, basta comprobar que $v_i \in \langle \lambda v_i \rangle$ y $\lambda v_i \in \langle v_i \rangle$, pero es inmediato que $\lambda v_i \in \langle v_i \rangle$ y $v_i = 1v_i = (\lambda^{-1}\lambda)v_i = \lambda^{-1}(\lambda v_i) \in \langle \lambda v_i \rangle$.

Probaremos ahora la igualdad $\langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_i + \mu v_j, \dots, v_j, \dots, v_n \rangle$. Haciendo uso de la proposición anterior, es inmediato que basta justificar la igualdad $\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_i + \mu v_j, v_j \rangle$, y para ello, haciendo de nuevo uso de 3.5, es suficiente comprobar las dos siguientes relaciones de inclusión:

$$\{v_i, v_j\} \subseteq \langle v_i + \mu v_j, v_j \rangle \quad \text{y} \quad \{v_i + \mu v_j, v_j\} \subseteq \langle v_i, v_j \rangle$$

ambas de justificación inmediata. □

Definición 3.8. Si $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, un elemento $v \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, que hemos comprobado que es de la forma $v = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i v_i$, diremos que es *combinación lineal* de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n . Por consiguiente el subespacio $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ de V está formado por todas las combinaciones lineales de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n .

Proposición 3.9. Si H es un subespacio vectorial de V , entonces, la relación entre los elementos de V , definida según:

$$u R_H v \iff u - v \in H$$

es una relación binaria de equivalencia en V para la que se verifica:

- 1) $\forall u \in V$, la clase de equivalencia de u es el conjunto $\{u + v / v \in H\}$, que representaremos simplemente por $u + H$.
- 2) Las dos operaciones que hacen de V un K -espacio vectorial son compatibles con esta relación binaria de equivalencia, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + H = u_2 + H \\ v_1 + H = v_2 + H \end{array} \right\} \implies (u_1 + v_1) + H = (u_2 + v_2) + H$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in K \\ u_1 + H = u_2 + H \end{array} \right\} \implies (\alpha u_1) + H = (\alpha u_2) + H$$

- 3) El conjunto cociente que define esta relación binaria de equivalencia, que representaremos por V/H , y cuyos elementos son las clases de equivalencia que la relación ha definido en V , tiene estructura de K -espacio vectorial para las dos operaciones siguientes, inducidas por las de V , y que seguiremos representando por $+$ y \cdot , respectivamente:

$$+ : V/H \times V/H \longrightarrow V/H \quad \cdot : K \times V/H \longrightarrow V/H$$

$$(u + H, v + H) \longmapsto (u + v) + H \quad (\alpha, u + H) \longmapsto (\alpha u) + H$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar que, como consecuencia de que H es subespacio vectorial de V , R_H es efectivamente una relación de equivalencia en V :

- *Reflexiva:* $\forall u \in V$, se tiene que $u R_H u$ ya que $u - u = 0 \in H$.
- *Simétrica:* $u R_H v \implies u - v \in H \implies v - u = -(u - v) \in H \implies v R_H u$.
- *Transitiva:* $u R_H v \text{ y } v R_H w \implies u - v \in H \text{ y } v - w \in H \implies$
 $\implies u - w = u - v + v - w \in H \implies u R_H w$.

1) $\forall u \in V$, la clase de equivalencia de u es el conjunto $[u] = \{v \in V / u R_H v\}$, entonces:

$$\begin{aligned} v \in [u] &= \{v \in V / u R_H v\} \implies u R_H v \implies \exists h \in H / u - v = h \implies \\ &\implies \exists h \in H / v = u - h \implies v \in u + H \\ v \in u + H &\implies \exists h \in H / v = u + h \implies \exists h \in H / u - v = -h \implies \\ &\implies u - v \in H \implies u R_H v \implies v \in [u] \end{aligned}$$

2) La suma de V es compatible con esta relación ya que:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} u_1 + H = u_2 + H \implies u_1 R_H u_2 \implies u_1 - u_2 \in H \\ v_1 + H = v_2 + H \implies v_1 R_H v_2 \implies v_1 - v_2 \in H \end{array} \right\} \implies (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \in H \implies \\ \implies (u_1 + v_1) R_H (u_2 + v_2) \implies (u_1 + v_1) + H = (u_2 + v_2) + H \end{aligned}$$

Y el producto de un escalar por un elemento de V es también compatible con esta relación ya que:

$$\begin{aligned} u_1 + H = u_2 + H \implies u_1 R_H u_2 \implies u_1 - u_2 \in H \implies \alpha(u_1 - u_2) \in H \implies \\ \implies \alpha u_1 - \alpha u_2 \in H \implies (\alpha u_1) R_H (\alpha u_2) \implies (\alpha u_1) + H = (\alpha u_2) + H \end{aligned}$$

3) La compatibilidad de las dos operaciones que hacen de V un K -espacio vectorial, con la relación binaria de equivalencia R_H , es la que nos permite definir las dos operaciones siguientes para las que vamos a comprobar que el conjunto cociente V/H tiene estructura de K -espacio vectorial:

$$\begin{aligned} + : V/H \times V/H &\longrightarrow V/H & \cdot : K \times V/H &\longrightarrow V/H \\ (u + H, v + H) &\longmapsto (u + v) + H & (\alpha, u + H) &\longmapsto (\alpha u) + H \end{aligned}$$

Haciendo uso de la definición de V como K -espacio vectorial, se tiene:

$$\text{EV1: } (u + H) + (v + H) = (u + v) + H = (v + u) + H = (v + H) + (u + H)$$

$$\forall u + H, v + H \in V/H$$

$$\begin{aligned} \text{EV2: } ((u + H) + (v + H)) + (w + H) &= ((u + v) + H) + (w + H) = \\ &= ((u + v) + w) + H = (u + (v + w)) + H = (u + H) + ((v + w) + H) = \\ &= (u + H) + ((v + H) + (w + H)) \quad \forall u + H, v + H, w + H \in V/H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EV3: } \exists 0 + H \in V/H \ / \ (u + H) + (0 + H) &= (u + 0) + H = u + H = \\ &= (0 + u) + H = (0 + H) + (u + H) \quad \forall u + H \in V/H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EV4: } \forall u + H \in V/H \ \exists -u + H \in V/H \ / \ (u + H) + (-u + H) &= \\ &= (u - u) + H = 0 + H = (-u + u) + H = (-u + H) + (u + H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EV5: } \alpha((u + H) + (v + H)) &= \alpha((u + v) + H) = (\alpha(u + v)) + H = \\ &= (\alpha u + \alpha v) + H = (\alpha u + H) + (\alpha v + H) = \alpha(u + H) + \alpha(v + H) \\ &\forall u + H, v + H \in V/H \text{ y } \forall \alpha \in K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EV6: } (\alpha + \beta)(u + H) &= (\alpha + \beta)u + H = (\alpha u + \beta u) + H = (\alpha u + H) + (\beta u + H) = \\ &= \alpha(u + H) + \beta(u + H) \quad \forall u + H \in V/H \text{ y } \forall \alpha, \beta \in K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EV7: } (\alpha\beta)(u + H) &= (\alpha\beta)u + H = \alpha(\beta u) + H = \alpha(\beta u + H) = \\ &= \alpha(\beta(u + H)) \quad \forall u + H \in V/H \text{ y } \forall \alpha, \beta \in K \end{aligned}$$

$$\text{EV8: } 1(u + H) = 1u + H = u + H \quad \forall u + H \in V/H$$

□

Definición 3.10. Si H es un subespacio de V , al conjunto cociente V/H , junto con las dos operaciones definidas en la proposición anterior, para las que hemos comprobado que V/H es un K -espacio vectorial, lo denominaremos *espacio vectorial cociente* de V mediante H .

4. Dependencia lineal

Definición 4.1. Es evidente que si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto no vacío de vectores de V , se verifica que $0 \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ ya que $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ es subespacio de V . En particular sabemos que:

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \in \langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

Diremos que:

- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un *sistema libre*, o *linealmente independiente*, si la igualdad anterior es la única forma de expresar al vector cero como combinación lineal de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n , es decir, si se cumple la siguiente implicación:

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \implies (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un *sistema ligado*, o *linealmente dependiente*, si la igualdad anterior no es la única forma de expresar al vector cero como combinación lineal de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n , es decir, si se cumple que:

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n, \text{ con } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0) \ / \ 0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Definición 4.2. Si S es un subconjunto no vacío de V , diremos que:

- S es *libre* o *linealmente independiente*, si todo subconjunto finito de S es libre.
- S es *ligado* o *linealmente dependiente*, si S contiene algún subconjunto finito ligado.

Ejemplos 4.3.

1. En el \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^3 , definido en uno de los ejemplos 1.5, de la página 63, el conjunto $S = \{u = (1, -1, 1), v = (1, 1, 1)\}$ es un sistema libre ya que:

$$0 = \alpha u + \beta v \implies (0, 0, 0) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(1, 1, 1) \implies (0, 0, 0) = (\alpha + \beta, -\alpha + \beta, \alpha + \beta) \implies$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{array} \right. \implies \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \implies \alpha = 0, \beta = 0$$

Transformándolo en otro equivalente en forma escalonada reducida

2. En el \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^3 el conjunto $S = \{u = (1, -1, 1), v = (-2, 2, -2)\}$ es un sistema ligado ya que:

$$0 = \alpha u + \beta v \implies (0, 0, 0) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(-2, 2, -2) \implies (0, 0, 0) = (\alpha - 2\beta, -\alpha + 2\beta, \alpha - 2\beta) \implies$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{array} \right. \implies \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

Transformándolo en otro equivalente en forma escalonada reducida

Puesto que este sistema es compatible indeterminado, aparte de la solución $(0, 0)$ tiene otras, por lo que S es ligado. En particular, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, se verifica que $0 = 2\lambda u + \lambda v$.

3. En el \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^3 el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$ es ligado ya que contiene al conjunto ligado $\{u = (1, -1, 1), v = (-2, 2, -2)\}$.
4. Consideremos el \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definido en uno de los ejemplos 1.5, de la página 63, que sabemos que está formado por todas las aplicaciones de \mathbb{N} en \mathbb{R} . Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la aplicación $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida según:

$$f_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

entonces el subconjunto $S = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es libre ya que cualquier subconjunto finito suyo es libre. En efecto, si consideramos un subconjunto finito de S , que será de la forma $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_t}\}$, se tiene:

[illegible]

Consecuencias 4.4.

- 1) Si $v \in V$, entonces:

$$\{v\} \text{ es libre} \iff v \neq 0$$

- 2) Si S y T son subconjuntos no vacíos de V , verificando que $S \subseteq T$, entonces:

$$S \text{ ligado} \implies T \text{ ligado} \quad \text{y} \quad T \text{ libre} \implies S \text{ libre}$$

- 3) Todo subconjunto de V que contenga al vector cero, es ligado, es decir:

$$0 \in S \implies S \text{ ligado}$$

DEMOSTRACIÓN.

- 1) \implies : Esta implicación la demostraremos probando que si $v = 0$ entonces $\{v\}$ es ligado, lo cual es inmediato porque si $v = 0$, tenemos que $0 = v = 1v$ con $1 \in K$ y $1 \neq 0$, por lo que $\{v\}$ es ligado.

\Leftarrow : Si suponemos $0 = \alpha v$, de una de las consecuencias 1.3, página 62, y del hecho que $v \neq 0$, se tiene que necesariamente $\alpha = 0$ y por tanto $\{v\}$ es libre.

- 2) Tanto si se trata de subconjuntos finitos o no de V , por ser S ligado contiene algún subconjunto finito ligado y, puesto que $S \subseteq T$, T también contiene algún subconjunto finito ligado y por consiguiente T también es ligado ya que $\exists v_1, v_2, \dots, v_t \in T$ y $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t) \neq (0, 0, \dots, 0)$ de manera que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_t v_t = 0$.

La otra implicación es consecuencia inmediata de ésta.

- 3) Se deduce directamente de los dos apartados anteriores puesto que si $0 \in S$, entonces S contiene un subconjunto ligado y por consiguiente es ligado.

☐

Proposición 4.5. Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto no vacío de vectores de V , entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1) S es ligado.
- 2) $\exists v_i \in S / v_i \in \langle S - \{v_i\} \rangle$.

DEMOSTRACIÓN.

1) \implies 2): Si S es ligado, entonces $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$, con $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, de manera que $0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. De $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ se tiene que, para algún i , $\alpha_i \neq 0$ y, por consiguiente, $\exists \alpha_i^{-1} \in K$. Usando la definición de espacio vectorial y sus consecuencias, tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_i^{-1} 0 = 0 &= \alpha_i^{-1} (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_i^{-1} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i^{-1} \alpha_i v_i + \dots + \alpha_i^{-1} \alpha_n v_n = \\ &= \alpha_i^{-1} \alpha_1 v_1 + \dots + v_i + \dots + \alpha_i^{-1} \alpha_n v_n \end{aligned}$$

de donde, denotando a $-\alpha_i^{-1} \alpha_j$ por β_j , para $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, se tiene:

$$v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \langle S - \{v_i\} \rangle$$

2) \implies 1): Puesto que $v_i \in \langle S - \{v_i\} \rangle$, se tiene que, $\exists \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n \in K$ de manera que $v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n$, por consiguiente:

$$0 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + (-1)v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n$$

lo que justifica que S es ligado puesto que

$$(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, -1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) \in K^n \quad \text{con} \quad (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, -1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) \neq (0, \dots, 0)$$

□

Proposición 4.6. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es libre y $\{v, v_1, \dots, v_n\}$ es ligado, entonces $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

DEMOSTRACIÓN. Por ser el conjunto $\{v, v_1, \dots, v_n\}$ ligado, entonces existe $(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^{n+1}$, con $(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, de manera que:

$$0 = \alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Pero si suponemos $\alpha = 0$, tenemos entonces que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$, con $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ y de manera que $0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, lo que implica que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es ligado, en contra de que no lo es. Por consiguiente $\alpha \neq 0$ y sabemos que $\exists \alpha^{-1} \in K$, de donde:

$$\alpha^{-1} 0 = 0 = \alpha^{-1} (\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = v + \alpha^{-1} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha^{-1} \alpha_n v_n$$

y de aquí es inmediato que $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

□

5. Bases

Definición 5.1. Un subconjunto B de V , diremos que es *base* de V , si es un sistema libre y generador de V , es decir, si es un sistema libre tal que $\langle B \rangle = V$.

Nota 5.2. Notemos que, puesto que $B \subseteq V$, la inclusión $\langle B \rangle \subseteq V$ siempre es cierta, por lo que para comprobar que B genera V , es suficiente justificar la inclusión $V \subseteq \langle B \rangle$.

Ejemplos 5.3.

1. En el \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^3 , el conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es base. En efecto:

- Es libre ya que:

$$(0, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \implies (0, 0, 0) = (\alpha, \beta, \gamma) \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$$

- Es generador ya que $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \in \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

2. En el K -espacio vectorial K^n , con $n \geq 1$, el conjunto $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$ es base. La justificación es análoga a la del ejemplo anterior.
3. En el K -espacio vectorial $M_{m \times n}(K)$, con $m, n \geq 1$, el conjunto $\{\Delta_s^r\}_{1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n}$ es base, donde Δ_s^r es la matriz que tiene todos sus términos 0 salvo el que corresponde a la fila r y columna s , que es 1. La justificación es análoga a la de K^n .
4. En el \mathbb{R} -espacio vectorial $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - 3z = 0, x - y + z = 0\}$, visto en 2.4, página 64, el conjunto $\{(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1)\}$ es base. En efecto, los elementos de este espacio vectorial (subespacio de \mathbb{R}^3) son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

y si transformamos este sistema en otro equivalente en forma escalonada reducida, obtenemos:

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}z = 0 \\ y - \frac{5}{3}z = 0 \end{cases}$$

por lo que el conjunto de soluciones es $\{(\frac{2}{3}\lambda, \frac{5}{3}\lambda, \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}$, o bien, expresado en forma matricial parametrizada:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

En consecuencia, todo elemento de H es de la forma $\lambda(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1) \in \langle (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1) \rangle$, lo que nos da la inclusión $H \subseteq \langle (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1) \rangle$. La inclusión $\langle (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1) \rangle \subseteq H$ se deriva de que $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1) \in H$ ya que es la solución del sistema que corresponde al valor del parámetro $\lambda = 1$. Asimismo, se trata de un sistema libre puesto que es un sistema formado por un único vector y éste es no nulo. También esto último puede razonarse teniendo en cuenta que:

$$(0, 0, 0) = \lambda(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1) = (\frac{2}{3}\lambda, \frac{5}{3}\lambda, \lambda) \implies \lambda = 0$$

Nota 5.4. Si V sólo tiene el vector cero, es decir, si $V = \{0\}$, entonces no tiene base puesto que el único subconjunto no vacío de V es $\{0\}$ que es ligado. Por el contrario, si V es un espacio vectorial que no se reduce al vector cero, es decir, si $V \neq \{0\}$, de acuerdo con 4.4, página 73, es evidente que V tiene algún sistema libre. Por otro lado, según vimos en 3.5, página 67, sabemos que $\langle V \rangle = V$, por lo que está también garantizada la existencia de algún subconjunto de V que es generador de V .

Nuestro propósito ahora es estudiar si en un espacio vectorial $V \neq \{0\}$ está o no garantizada la existencia de algún sistema que sea simultáneamente libre y generador de V , es decir, la existencia de alguna base de V . En este sentido, queremos hacer notar que es posible demostrar que *todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ tiene base*, si bien aquí nos limitaremos a hacer la demostración y a utilizarlo para espacios vectoriales $V \neq \{0\}$ que tengan algún sistema generador finito.

Proposición 5.5. Si V tiene algún sistema generador finito con n elementos, entonces todo sistema libre tiene a lo sumo n elementos.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es generador de V y que L es un subconjunto libre de V . Si suponemos que L tiene al menos $n + 1$ elementos, u_1, \dots, u_{n+1} , pretendemos llegar a un absurdo. Puesto que S es generador de V , estos elementos podemos expresarlos como combinación lineal de los vectores de S y, en consecuencia, existen escalares $\{a_{ij}^i\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1}$ de manera que:

[illegible]

Definamos ahora la matriz $A = \left[a_j^i \right]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1} \in M_{n \times (n+1)}(K)$, cuyo rango como mucho será n , es decir, $rg A \leq n$. Si consideramos ahora el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $AX = O$, con n ecuaciones y $n+1$ incógnitas, sabemos que es un sistema compatible por ser homogéneo, e indeterminado puesto que el rango de su matriz de coeficientes es estrictamente menor que el número de incógnitas.

Por consiguiente, existe alguna solución no trivial de este sistema, es decir $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in K^{n+1}$ con $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$, de manera que $AX = O$, es decir:

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{n+1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Veamos finalmente que $0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{n+1} u_{n+1}$, con lo que tendremos que $\{u_1, u_2, \dots, u_{n+1}\}$ será ligado y por tanto también L :

$$\begin{aligned} & \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{n+1} u_{n+1} = \\ & = \alpha_1 (a_1^1 v_1 + \cdots + a_1^n v_n) + \alpha_2 (a_2^1 v_1 + \cdots + a_2^n v_n) + \cdots + \alpha_{n+1} (a_{n+1}^1 v_1 + \cdots + a_{n+1}^n v_n) = \\ & = (\alpha_1 a_1^1 + \alpha_2 a_2^1 + \cdots + \alpha_{n+1} a_{n+1}^1) v_1 + \cdots + (\alpha_1 a_1^n + \alpha_2 a_2^n + \cdots + \alpha_{n+1} a_{n+1}^n) v_n = \\ & = 0 v_1 + \cdots + 0 v_n = 0 \end{aligned}$$

□

Proposición 5.6. Si S es un sistema generador finito de V y L es un sistema libre tal que $L \subseteq S$, entonces existe alguna base B de V verificando que $L \subseteq B \subseteq S$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto formado por los subconjuntos de S que son libres y contienen a L , es decir:

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq S / L \subseteq F \text{ y } F \text{ es libre}\}$$

que es obviamente un conjunto no vacío puesto que $L \in \mathcal{F}$. Elijamos ahora $B = \{v_1, \dots, v_n\} \in \mathcal{F}$ con el mayor número posible de elementos. Pretendemos ver que B es base y para ello únicamente queda comprobar que B genera V , además, haciendo uso de una de las consecuencias 3.5, página 67, bastará comprobar la inclusión $S \subseteq \langle B \rangle$. Supongamos pues $v \in S$, entonces:

- Si $v \in B$, obviamente se tiene $v \in \langle B \rangle$.
- Si $v \notin B$, considerando el conjunto $B' = B \cup \{v\}$, es inmediato que $L \subseteq B \subset B' \subseteq S$, pero como $B' \notin \mathcal{F}$ porque tiene más elementos que B , necesariamente se tiene que B' es ligado. Finalmente, de 4.6, página 74, se deduce que $v \in \langle B \rangle$.

□

Corolario 5.7. Si S es un sistema generador finito de $V \neq \{0\}$, entonces existe alguna base B de V tal que $B \subseteq S$.

DEMOSTRACIÓN. Si suponemos $S = \{0\}$ tenemos $V = \langle 0 \rangle = \{0\}$, lo cual no es cierto. Por consiguiente podemos asegurar que $\exists v \in S / v \neq 0$ y, de acuerdo con 4.4, página 73, $\{v\}$ es libre. De la proposición anterior deducimos la existencia de alguna base B de V verificando $\{v\} \subseteq B \subseteq S$, con lo que tenemos el resultado buscado. \square

Nota 5.8. Notemos que el resultado anterior nos justifica, tal y como habíamos anunciado en 5.4, que *todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$, con algún sistema generador finito, tiene base.*

Corolario 5.9. Si V tiene algún sistema generador finito, S , entonces todo sistema libre, L , puede ampliarse con vectores de S hasta una base de V .

DEMOSTRACIÓN. Si definimos $S' = S \cup L$, es inmediato que $V = \langle S \rangle \leq \langle S' \rangle \leq V$ y por consiguiente S' es también sistema generador de V . Además, sabemos que S es finito y, de la proposición 5.5, página 76, deducimos que L es también finito, por tanto S' es sistema generador finito de V , entonces, aplicando a L y S' la proposición 5.6, deducimos la existencia de una base B de V tal que $L \subseteq B \subseteq S'$, de donde tenemos el resultado buscado. \square

6. Dimensión

Proposición 6.1. Si $V \neq \{0\}$ y admite algún sistema generador finito, entonces todas las bases de V son finitas y tienen el mismo número de elementos.

DEMOSTRACIÓN. De la proposición 5.5, página 76, si B y B' son bases de V , ambos son conjuntos finitos, que supondremos con n y n' elementos, respectivamente. Aplicando ahora la proposición 5.5 a B como sistema generador finito y B' como sistema libre, deducimos que $n' \leq n$. Y aplicando de nuevo la misma proposición a B' como sistema generador y a B como sistema libre, obtenemos que $n \leq n'$. Por consiguiente todas las bases son finitas y tienen el mismo número de elementos. \square

Definición 6.2. Si $V \neq \{0\}$ y admite algún sistema generador finito, al número de elementos de cada una de las bases de V lo denominaremos *dimensión* y lo representaremos por $\dim_K V$.

Esta definición se extiende también al K -espacio vectorial que se reduce al vector cero, que sabemos que no tiene ninguna base, diciendo que su dimensión es 0, y representándolo por $\dim_K \{0\} = 0$.

En general, si V es un K -espacio vectorial que admite algún sistema generador finito, diremos que V es de *dimensión finita* y además $\dim_K V = n \geq 0$.

Ejemplos 6.3.

1. El K -espacio vectorial K^n , con $n \geq 1$, tiene dimensión n . Es consecuencia de lo visto en los ejemplos de 5.3, página 75.

2. El K -espacio vectorial $M_{m \times n}(K)$, con $m, n \geq 1$, tiene dimensión mn . Es consecuencia de lo visto en los ejemplos de 5.3, página 75.

Proposición 6.4. Si $\dim_K V = n > 0$ y S es un subconjunto de V con n elementos, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1) S es sistema libre.
- 2) S es base de V .
- 3) S es sistema generador de V .

DEMOSTRACIÓN.

- 1) \implies 2): Si S es libre, de 5.9 se deduce que $\exists B$, base de V tal que $S \subseteq B$. Pero como B y S son conjuntos finitos con el mismo número de elementos, necesariamente $S = B$ y de aquí S es base de V .
- 2) \implies 3): Si S es base, es inmediato que es sistema generador de V .
- 3) \implies 1): Si S es sistema generador de V , como es finito, de 5.7 se deduce que $\exists B$, base de V tal que $B \subseteq S$. Pero como B y S son conjuntos finitos con el mismo número de elementos, necesariamente $S = B$ y de aquí S es libre por serlo B .

□

Proposición 6.5. Si V es un K -espacio vectorial de dimensión finita y H es un subespacio de V , entonces H es también de dimensión finita y $\dim_K H \leq \dim_K V$. Además, si $\dim_K H = \dim_K V$, necesariamente se tiene que $H = V$.

DEMOSTRACIÓN. Si $H = \{0\}$, es evidente que H es de dimensión finita y $\dim_K H = 0 \leq \dim_K V$. Si suponemos $H \neq \{0\}$, todo sistema libre de H lo es también de V y, de 5.5, página 76, se deduce que tiene a lo sumo $\dim_K V$ elementos. Consideremos un subconjunto libre de H con el mayor número posible de elementos, B_H , y veamos que es base de H . Para ello, falta únicamente demostrar la inclusión $H \subseteq \langle B_H \rangle$. Consideremos pues $h \in H$, entonces, si $h \in B_H$, se tiene $h \in \langle B_H \rangle$, y si $h \notin B_H$, entonces $B_H \cup \{h\}$ es un subconjunto de H tal que, por la elección de B_H , es necesariamente ligado y, por ser B_H libre, de 4.6 página 74, se tiene que $h \in \langle B_H \rangle$. Por tanto H es de dimensión finita con $\dim_K H \leq \dim_K V$.

Finalmente, si $\dim_K H = \dim_K V$ y suponemos B_H base de H , de la proposición anterior, 6.4, se deriva que B_H es también base de V y por consiguiente $H = \langle B_H \rangle = V$. □

Proposición 6.6. Si V es un K -espacio vectorial de dimensión finita y H_1 y H_2 son subespacios de V , entonces:

$$\dim_K(H_1 + H_2) = \dim_K H_1 + \dim_K H_2 - \dim_K(H_1 \cap H_2)$$

Además, si la suma es directa, entonces:

$$\dim_K(H_1 \oplus H_2) = \dim_K H_1 + \dim_K H_2$$

DEMOSTRACIÓN. La proposición obviamente es cierta si alguno de los subespacios H_1 o H_2 se reduce al vector cero. Supongamos pues que $H_1 \neq \{0\} \neq H_2$ y distingamos los dos casos siguientes:

- Caso $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$: Supongamos que $\{w_1, \dots, w_r\}$ es base de $H_1 \cap H_2$, entonces, por ser un sistema libre de ambos subespacios, haciendo uso para uno y otro espacios de la proposición 5.9, página 78, obtenemos una base de H_1 de la forma $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s\}$, donde $\dim_K H_1 = r+s$, y una base de H_2 de la forma $\{w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_t\}$, donde $\dim_K H_2 = r+t$. Pretendemos justificar que $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_t\}$ es base de $H_1 + H_2$, en efecto:

- Es generador: Haciendo uso de 3.6, página 68, se tiene:

$$\begin{aligned} H_1 + H_2 &= \langle w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s \rangle + \langle w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_t \rangle = \\ &= \langle w_1 \rangle + \dots + \langle w_r \rangle + \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_s \rangle + \langle w_1 \rangle + \dots + \langle w_r \rangle + \langle u_1 \rangle + \dots + \langle u_t \rangle = \\ &= \langle w_1 \rangle + \dots + \langle w_r \rangle + \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_s \rangle + \langle u_1 \rangle + \dots + \langle u_t \rangle = \\ &= \langle w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_t \rangle \end{aligned}$$

donde también hemos usado que para todo subespacio H de V , como consecuencia inmediata de la definición suma de subespacios, se cumple que $H + H = H$.

- Es libre: Supongamos $0 = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_t u_t$, entonces:

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s = -\gamma_1 u_1 - \dots - \gamma_t u_t$$

y como consecuencia de esta igualdad obtenemos que el vector de H_1 , $-\gamma_1 u_1 - \dots - \gamma_t u_t$ también pertenece a H_2 , por lo que $-\gamma_1 u_1 - \dots - \gamma_t u_t \in H_1 \cap H_2$ y podemos expresarlo como combinación lineal de la base de $H_1 \cap H_2$, es decir, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ tales que:

$$-\gamma_1 u_1 - \dots - \gamma_t u_t = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r$$

y de aquí:

$$0 = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_t u_t$$

pero puesto que $\{w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_t\}$ es un sistema libre, necesariamente todos estos escalares son 0 y, en particular:

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_t = 0$$

de donde, considerando de nuevo la igualdad inicial, tenemos:

$$0 = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_t u_t =$$

$$= \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s$$

y haciendo finalmente uso de que $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s\}$ es libre, deducimos también que:

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$$

En consecuencia, en este caso tenemos:

$$\dim_K(H_1 + H_2) = r + s + t = (r + s) + (r + t) - t =$$

$$= \dim_K H_1 + \dim_K H_2 - \dim_K(H_1 \cap H_2)$$

- Caso $H_1 \cap H_2 = \{0\}$: En este caso, de acuerdo con 3.3, página 66, la suma $H_1 + H_2$ sabemos que es directa. Consideremos una base de H_1 , $\{v_1, \dots, v_s\}$, y otra de H_2 , $\{u_1, \dots, u_t\}$. De forma análoga al caso anterior vamos a justificar que $\{v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_t\}$ es base de $H_1 + H_2$. En efecto:

- Es generador:

$$H_1 + H_2 = \langle v_1, \dots, v_s \rangle + \langle u_1, \dots, u_t \rangle =$$

$$= \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_s \rangle + \langle u_1 \rangle + \cdots + \langle u_t \rangle = \langle v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_t \rangle$$

- Es libre: Supongamos $0 = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_t u_t$, entonces:

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s = -\gamma_1 u_1 - \cdots - \gamma_t u_t$$

y como consecuencia de esta igualdad obtenemos que:

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s = -\gamma_1 u_1 - \cdots - \gamma_t u_t \in H_1 \cap H_2 = \{0\}$$

de donde, al ser $\{v_1, \dots, v_s\}$ y $\{u_1, \dots, u_t\}$ libres, se deduce que:

$$\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_t$$

En consecuencia, en este caso tenemos:

$$\dim_K(H_1 \oplus H_2) = s + t = \dim_K H_1 + \dim_K H_2$$

□

Proposición 6.7. Si V es un K -espacio vectorial de dimensión finita y H es un subespacio de V , entonces el K -espacio vectorial cociente, V/H es también de dimensión finita y además se verifica que $\dim_K V/H = \dim_K V - \dim_K H$

DEMOSTRACIÓN. Si $H = \{0\}$, entonces $\forall v \in V$ se tiene que $v + H = \{v\}$ y podemos identificar $V/\{0\}$ con V y la igualdad es cierta. Análogamente, si $H = V$, entonces $V/H = \{0 + H\}$ y por tanto $\dim_K V/H = 0$ y la igualdad es cierta. Supongamos pues $V \neq H \neq \{0\}$ y consideremos una base de H , $\{h_1, \dots, h_r\}$. Por ser éste un sistema libre de V , haciendo uso de 5.9, página 78, está contenido en alguna base de V , $\{h_1, \dots, h_r, v_1, \dots, v_s\}$, por lo que $\dim_K V = r + s$. Para demostrar la proposición pretendemos justificar que el subconjunto $\{v_1 + H, \dots, v_s + H\}$ de V/H es base. En efecto:

- Es generador: Basta justificar la inclusión $V/H \subseteq \langle v_1 + H, \dots, v_s + H \rangle$ y para ello consideremos $v + H \in V/H$. Por ser $\{h_1, \dots, h_r, v_1, \dots, v_s\}$ base de V , deducimos que $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in K$ de manera que $v = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_r h_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s$ y, puesto que $v - (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s) = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_r h_r \in H$, entonces de aquí se tiene:

$$v + H = (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s) + H = \beta_1(v_1 + H) + \dots + \beta_s(v_s + H)$$

- Es libre: Supongamos $0 + H = \beta_1(v_1 + H) + \dots + \beta_s(v_s + H)$, entonces:

$$0 + H = \beta_1(v_1 + H) + \dots + \beta_s(v_s + H) = (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s) + H \implies \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s \in H$$

de donde se tiene que $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ de manera que:

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_r h_r$$

y de aquí:

$$0 = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_r h_r - \beta_1 v_1 - \dots - \beta_s v_s$$

por lo que, como consecuencia de que $\{h_1, \dots, h_r, v_1, \dots, v_s\}$ es libre, tenemos finalmente:

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_s = 0$$

□

Definición 6.8. Si V es un K -espacio vectorial de dimensión finita y S es un subconjunto no vacío de V , a la dimensión del subespacio vectorial de V generado por S , la denominaremos *rango* de S , y lo representaremos por $\text{rg } S$, es decir, $\text{rg } S = \dim_K \langle S \rangle$. Obviamente se verifica que $\text{rg } S \leq \dim_K V$.

Consecuencia 6.9. En un K -espacio vectorial V , si $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, entonces:

$$\text{rg } \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} = \text{rg } \{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} = \text{rg } \{v_1, \dots, v_i + \mu v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\}$$

para $1 \leq i \neq j \leq n$ y $\forall \lambda \in K, \lambda \neq 0$ y $\forall \mu \in K$.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia directa del corolario 3.7, página 68.

□

7. Coordenadas

A lo largo de este apartado V representará un K -espacio vectorial de dimensión $\dim_K V = n > 0$. Asimismo las bases de V las consideraremos ordenadas, es decir, una base de V será una n -tupla de vectores de V , $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, de manera que el conjunto $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ es un sistema libre y generador de V .

Definición 7.1. De acuerdo con lo visto en 5.3, página 75, la n -tupla de vectores del K -espacio vectorial K^n , $\mathbb{B}_n = (e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1))$, es una base ordenada a la que denominaremos *base canónica* de K^n .

Análogamente, la mn -tupla $(\Delta_1^1, \Delta_1^2, \dots, \Delta_1^m, \Delta_2^1, \Delta_2^2, \dots, \Delta_2^m, \dots, \Delta_n^1, \Delta_n^2, \dots, \Delta_n^m)$ de vectores del K -espacio vectorial $M_{m \times n}(K)$, es una base ordenada a la que denominaremos *base canónica* de $M_{m \times n}(K)$.

Proposición 7.2. Si $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ es una base de V , entonces $\forall v \in V$, existe un único elemento de K^n , $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, tal que $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$. Esto nos permite definir la aplicación $\varphi_{\mathbb{B}} : V \rightarrow K^n$ según:

$$\varphi_{\mathbb{B}}(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) / v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

DEMOSTRACIÓN. Si $v \in V$, entonces, por ser $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ sistema generador de V , tenemos que $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ de manera que $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$. Por otro lado, si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ y $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n$ verifican que $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ y $v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$, entonces:

$$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n \implies 0 = (\alpha_1 - \beta_1) b_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) b_n \implies$$

$$\implies \alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0 \implies \alpha_1 = \beta_1 \dots \alpha_n = \beta_n$$

Obviamente $\varphi_{\mathbb{B}} : V \rightarrow K^n$ es una aplicación ya que todo elemento de V tiene imagen en K^n y ésta es única. □

Definición 7.3. Si \mathbb{B} es una base de V y x es un vector de V , entonces, al elemento $\varphi_{\mathbb{B}}(x)$ de K^n lo denominaremos *n -tupla de coordenadas de x en la base \mathbb{B}* . Asimismo, representaremos por $[x]_{\mathbb{B}}$ a la matriz columna formada por las n coordenadas de x en la base \mathbb{B} , y a la aplicación $\varphi_{\mathbb{B}} : V \rightarrow K^n$, la denominaremos *aplicación coordinada respecto a la base \mathbb{B}* .

De acuerdo con esta notación, si $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ es base de V y x es un vector de V , con (x^1, x^2, \dots, x^n) como n -tupla de coordenadas en la base \mathbb{B} , entonces se tiene:

$$\varphi_{\mathbb{B}}(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in K^n \quad ; \quad x = x^1 b_1 + x^2 b_2 + \dots + x^n b_n \in V \quad ; \quad [x]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \in M_{n \times 1}(K)$$

Nota 7.4. (*Convenio de Einstein*) Tal y como acabamos de definir, si $x \in V$ y tiene como coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) en la base $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, la expresión de x como combinación lineal de los vectores de \mathbb{B} es:

$$x = x^1 b_1 + x^2 b_2 + \dots + x^n b_n = \sum_{1 \leq i \leq n} x^i b_i$$

Hemos optado por denotar con superíndices a las n coordenadas de un vector, porque esto nos permite utilizar el denominado *convenio de Einstein*, que consiste en que si en dos factores distintos de un mismo término aparece el mismo índice, en un caso como superíndice y en otro como subíndice, la expresión debe ser interpretada como la suma de los términos obtenidos al dar a los índices repetidos todos los valores posibles. De este modo, la expresión de x como combinación lineal de los vectores de \mathbb{B} quedaría simplemente denotada por $x = x^i b_i$.

Ejemplos 7.5.

1. En el K -espacio vectorial K^n , la n -tupla de coordenadas de un vector, en la base canónica, coincide con sus componentes como elemento que es del producto cartesiano K^n , es decir:

$$\begin{aligned} (a^1, a^2, \dots, a^n) &= a^1(1, 0, \dots, 0) + a^2(0, 1, \dots, 0) + \dots + a^n(0, 0, \dots, 1) = \\ &= a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^n e_n = \sum_{1 \leq i \leq n} a^i e_i = a^i e_i \end{aligned}$$

Además, como consecuencia, se tiene que $\varphi_{\mathbb{B}_n}$ es la aplicación identidad en K^n .

2. En el K -espacio vectorial $M_{m \times n}(K)$, la mn -tupla de coordenadas de un vector, en la base canónica, coincide con los términos de la matriz, es decir:

$$\begin{aligned} \left[a_j^i \right]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} &= a_1^1 \Delta_1^1 + a_1^2 \Delta_1^2 + \dots + a_1^m \Delta_1^m + a_2^1 \Delta_2^1 + a_2^2 \Delta_2^2 + \dots + a_2^m \Delta_2^m + \dots + a_n^1 \Delta_n^1 + a_n^2 \Delta_n^2 + \dots + a_n^m \Delta_n^m = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_j^i \Delta_j^i \end{aligned}$$

Notemos que en esta última expresión no podemos utilizar el convenio de Einstein puesto que los índices repetidos son del mismo tipo, es decir, se repiten dos superíndices entre sí y dos subíndices entre sí.

Proposición 7.6. Si \mathbb{B} es una base de V , entonces la aplicación coordinada respecto a la base \mathbb{B} , $\varphi_{\mathbb{B}} : V \rightarrow K^n$, verifica las siguientes propiedades:

- 1) Es biyectiva.
- 2) $\varphi_{\mathbb{B}}(\alpha v) = \alpha \varphi_{\mathbb{B}}(v) \quad \forall \alpha \in K, \forall v \in V$.
- 3) $\varphi_{\mathbb{B}}(u + v) = \varphi_{\mathbb{B}}(u) + \varphi_{\mathbb{B}}(v) \quad \forall u, v \in V$.
- 4) $\varphi_{\mathbb{B}}(0) = (0, 0, \dots, 0) \in K^n$.
- 5) Si $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es un subconjunto no vacío de V , entonces:

$$\varphi_{\mathbb{B}}(\langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle) = \langle \varphi_{\mathbb{B}}(v_1), \varphi_{\mathbb{B}}(v_2), \dots, \varphi_{\mathbb{B}}(v_r) \rangle$$

- 6) Si H es un subconjunto no vacío de V , entonces:

$$H \leq V \iff \varphi_{\mathbb{B}}(H) \leq K^n$$

- 7) Si $H \leq V$ entonces:

$$\{h_1, h_2, \dots, h_r\} \text{ es base de } H \iff \{\varphi_{\mathbb{B}}(h_1), \varphi_{\mathbb{B}}(h_2), \dots, \varphi_{\mathbb{B}}(h_r)\} \text{ es base de } \varphi_{\mathbb{B}}(H)$$

- 8) Si $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es un subconjunto no vacío de V , entonces:

$$rg \{v_1, v_2, \dots, v_r\} = rg \{\varphi_{\mathbb{B}}(v_1), \varphi_{\mathbb{B}}(v_2), \dots, \varphi_{\mathbb{B}}(v_r)\}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, entonces:

- 1)
 - $\varphi_{\mathbb{B}}$ es inyectiva ya que: $\varphi_{\mathbb{B}}(u) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi_{\mathbb{B}}(v) \implies u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = v$.
 - $\varphi_{\mathbb{B}}$ es suprayectiva ya que, para todo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$, existe $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \in V$ tal que $\varphi_{\mathbb{B}}(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
- 2) Supongamos $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, entonces $\varphi_{\mathbb{B}}(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y:

$$\alpha v = \alpha(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha \alpha_n b_n$$

y por consiguiente:

$$\varphi_{\mathbb{B}}(\alpha v) = (\alpha \alpha_1, \dots, \alpha \alpha_n) = \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha \varphi_{\mathbb{B}}(v)$$

- 3) Supongamos $u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ y $v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$, entonces $\varphi_{\mathbb{B}}(u) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\varphi_{\mathbb{B}}(v) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ y:

$$u + v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n = (\alpha_1 + \beta_1) b_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) b_n$$

y por consiguiente:

$$\varphi_{\mathbb{B}}(u + v) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = \varphi_{\mathbb{B}}(u) + \varphi_{\mathbb{B}}(v)$$

$$4) \quad \varphi_{\mathbb{B}}(0+0) = \begin{cases} \varphi_{\mathbb{B}}(0) & \text{puesto que } 0+0=0 \\ \varphi_{\mathbb{B}}(0) + \varphi_{\mathbb{B}}(0) & \text{por el apartado anterior} \end{cases}$$

Y de aquí se tiene $\varphi_{\mathbb{B}}(0) + \varphi_{\mathbb{B}}(0) = \varphi_{\mathbb{B}}(0)$ y por consiguiente $\varphi_{\mathbb{B}}(0) = (0, 0, \dots, 0)$.

- 5) Es consecuencia inmediata de cómo son los elementos del subespacio generado por un conjunto finito de vectores, visto en 3.6, página 68, y de los apartados 2) y 3) de esta proposición.
- 6) Supongamos que $H \leq V$ y veamos que $\varphi_{\mathbb{B}}(H) \leq K^n$. Obviamente $\varphi_{\mathbb{B}}(H)$ es un subconjunto no vacío de K^n y, de acuerdo con el teorema de caracterización de subespacios, proposición 2.2, página 64, si consideramos $\alpha\varphi_{\mathbb{B}}(u) + \beta\varphi_{\mathbb{B}}(v)$, con $\alpha, \beta \in K$ y $u, v \in H$, por ser H subespacio de V , sabemos que $\alpha u + \beta v \in H$ y, haciendo uso de los apartados 2) y 3) tenemos:

$$\alpha\varphi_{\mathbb{B}}(u) + \beta\varphi_{\mathbb{B}}(v) = \varphi_{\mathbb{B}}(\alpha u + \beta v) \in \varphi_{\mathbb{B}}(H)$$

Supongamos ahora que $\varphi_{\mathbb{B}}(H) \leq K^n$ y consideremos $\alpha, \beta \in K$ y $u, v \in H$, entonces, por ser $\varphi_{\mathbb{B}}(H)$ subespacio de K^n , sabemos que $\alpha\varphi_{\mathbb{B}}(u) + \beta\varphi_{\mathbb{B}}(v) \in \varphi_{\mathbb{B}}(H)$ y, haciendo uso de los apartados 2) y 3) tenemos:

$$\varphi_{\mathbb{B}}(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi_{\mathbb{B}}(u) + \beta\varphi_{\mathbb{B}}(v) \in \varphi_{\mathbb{B}}(H)$$

de donde $\exists h \in H$ tal que $\varphi_{\mathbb{B}}(\alpha u + \beta v) = \varphi_{\mathbb{B}}(h)$ y, por ser $\varphi_{\mathbb{B}}$ inyectiva, tenemos que $\alpha u + \beta v = h \in H$, lo que justifica que H es subespacio de V .

- 7) Supongamos en primer lugar que $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ es base de $H \leq V$, entonces:

- $\{\varphi_{\mathbb{B}}(h_1), \varphi_{\mathbb{B}}(h_2), \dots, \varphi_{\mathbb{B}}(h_r)\}$ es libre ya que:

$$\alpha_1\varphi_{\mathbb{B}}(h_1) + \alpha_2\varphi_{\mathbb{B}}(h_2) + \dots + \alpha_r\varphi_{\mathbb{B}}(h_r) = (0, 0, \dots, 0) \implies$$

$$\implies \varphi_{\mathbb{B}}(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_r h_r) = (0, 0, \dots, 0) = \varphi_{\mathbb{B}}(0)$$

y por ser $\varphi_{\mathbb{B}}$ inyectiva obtenemos $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_r h_r = 0$ de donde, haciendo uso de que $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ es libre, se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$.

- $\{\varphi_{\mathbb{B}}(h_1), \varphi_{\mathbb{B}}(h_2), \dots, \varphi_{\mathbb{B}}(h_r)\}$ es generador de $\varphi_{\mathbb{B}}(H)$ ya que es un subconjunto de $\varphi_{\mathbb{B}}(H)$ y, cualquier elemento de $\varphi_{\mathbb{B}}(H)$, es de la forma:

$$\varphi_{\mathbb{B}}(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_r h_r) =$$

$$= \alpha_1\varphi_{\mathbb{B}}(h_1) + \alpha_2\varphi_{\mathbb{B}}(h_2) + \dots + \alpha_r\varphi_{\mathbb{B}}(h_r) \in \langle \varphi_{\mathbb{B}}(h_1), \varphi_{\mathbb{B}}(h_2), \dots, \varphi_{\mathbb{B}}(h_r) \rangle$$

Supongamos ahora que $\{\varphi_{\mathbb{B}}(h_1), \varphi_{\mathbb{B}}(h_2), \dots, \varphi_{\mathbb{B}}(h_r)\}$ es base de $\varphi_{\mathbb{B}}(H)$, entonces:

- $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ es libre ya que:

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_r h_r = 0 \implies$$

$$\implies \varphi_{\mathbb{B}}(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_r h_r) = \varphi_{\mathbb{B}}(0) = (0, 0, \dots, 0) \implies$$

$$\implies \alpha_1 \varphi_{\mathbb{B}}(h_1) + \alpha_2 \varphi_{\mathbb{B}}(h_2) + \dots + \alpha_r \varphi_{\mathbb{B}}(h_r) = (0, 0, \dots, 0)$$

de donde se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$.

- $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ es generador de H ya que está contenido en H y, si $h \in H$, entonces $\varphi_{\mathbb{B}}(h) \in \varphi_{\mathbb{B}}(H)$, por lo que $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in K$ de manera que:

$$\varphi_{\mathbb{B}}(h) = \alpha_1 \varphi_{\mathbb{B}}(h_1) + \alpha_2 \varphi_{\mathbb{B}}(h_2) + \dots + \alpha_r \varphi_{\mathbb{B}}(h_r) = \varphi_{\mathbb{B}}(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_r h_r)$$

y de la inyectividad de $\varphi_{\mathbb{B}}$ se tiene $h = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_r h_r \in \langle h_1, h_2, \dots, h_r \rangle$.

- 8) Supongamos que $rg \{v_1, v_2, \dots, v_r\} = t$, entonces el subespacio $\langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$ tiene una base con t elementos, $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_t}\}$. Haciendo uso del apartado 7), deducimos que $\{\varphi_{\mathbb{B}}(v_{i_1}), \varphi_{\mathbb{B}}(v_{i_2}), \dots, \varphi_{\mathbb{B}}(v_{i_t})\}$ es base de $\varphi_{\mathbb{B}}(\langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle)$ y, de acuerdo con el apartado 5), también lo es de $\langle \varphi_{\mathbb{B}}(v_1), \varphi_{\mathbb{B}}(v_2), \dots, \varphi_{\mathbb{B}}(v_r) \rangle$, por lo que, teniendo en cuenta que por ser $\varphi_{\mathbb{B}}$ inyectiva, $\{\varphi_{\mathbb{B}}(v_{i_1}), \varphi_{\mathbb{B}}(v_{i_2}), \dots, \varphi_{\mathbb{B}}(v_{i_t})\}$ sigue teniendo t elementos, deducimos que $rg \{\varphi_{\mathbb{B}}(v_1), \varphi_{\mathbb{B}}(v_2), \dots, \varphi_{\mathbb{B}}(v_r)\} = t = rg \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$.

□

Ejemplos 7.7. En los siguientes ejemplos vemos cómo la proposición anterior, 7.6, nos permite estudiar algunos aspectos de un K -espacio vectorial de dimensión n , a través del K -espacio vectorial K^n .

1. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathbb{B} = (b_1, b_2, b_3)$ base de V . Consideremos el subconjunto de V :

$$T = \{xb_1 + yb_2 + zb_3 \in V \mid 2x + y - 3z = 0, x - y + z = 0\}$$

Haciendo uso de los apartados 2) y 3) de la proposición anterior, y de que $\varphi_{\mathbb{B}}(b_1) = (1, 0, 0)$, $\varphi_{\mathbb{B}}(b_2) = (0, 1, 0)$ y $\varphi_{\mathbb{B}}(b_3) = (0, 0, 1)$, es fácil comprobar que:

$$\varphi_{\mathbb{B}}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0, x - y + z = 0\}$$

y, en 2.4, página 64, vimos que este conjunto es un subespacio de \mathbb{R}^3 por lo que, de acuerdo con el apartado 6) de la proposición anterior, obtenemos que T es subespacio de V . Además, en 5.3, página 75, vimos que $\{(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1)\}$ es base de este subespacio, en consecuencia, haciendo uso del apartado 7) de la proposición anterior, deducimos que $\{\frac{2}{3}b_1 + \frac{5}{3}b_2 + b_3\}$ es base de T .

2. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathbb{B} = (b_1, b_2, b_3)$ base de V . Consideremos los vectores de V :

$$u = b_1 - b_2 + b_3 \quad \text{y} \quad v = b_1 + b_2 + b_3$$

En 4.3, página 72, vimos que el sistema de \mathbb{R}^3 , $\{(1, -1, 1), (1, 1, 1)\}$ es un sistema libre de \mathbb{R}^3 , en consecuencia, haciendo uso del apartado 8) de la proposición anterior, deducimos que $\{u, v\}$ es un sistema libre de V .

8. Subespacios asociados a una matriz. Caracterización del rango

Definición 8.1. A partir de una matriz $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$, podemos considerar los siguientes sistemas de vectores de K^n y K^m , formados respectivamente por sus filas y por sus columnas:

$$\{F_i(A) = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i)\}_{1 \leq i \leq m} \subseteq K^n \quad \text{y} \quad \{C_j(A) = (a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^m)\}_{1 \leq j \leq n} \subseteq K^m$$

y que generan los siguientes subespacios denominados, respectivamente, *subespacio de filas de A* y *subespacio de columnas de A* :

$$\begin{cases} \text{Fil}(A) &= \langle F_1(A), F_2(A), \dots, F_m(A) \rangle \leq K^n \\ \text{Col}(A) &= \langle C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A) \rangle \leq K^m \end{cases}$$

Proposición 8.2. Si $A \in M_{m \times n}(K)$ y $R = \text{Fer}(A)$, entonces:

- 1) Las filas no nulas de R forman base de $\text{Fil}(A)$.
- 2) Las columnas de A que en R pasan a ser las columnas que contienen a los 1 pivote, forman base de $\text{Col}(A)$.

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Puesto que las filas de R se obtienen aplicando operaciones elementales fila a las filas de A , de 3.7, página 68, se tiene que:

$$\text{Fil}(A) = \langle F_1(A), F_2(A), \dots, F_m(A) \rangle = \langle F_1(R), F_2(R), \dots, F_m(R) \rangle$$

Por otro lado, si suponemos $\text{rg } A = r$, tendremos que:

$$F_{r+1}(R) = \dots = F_m(R) = (0, 0, \dots, 0) \in K^n$$

por lo que $F_{r+1}(R), \dots, F_m(R) \in \langle F_1(R), F_2(R), \dots, F_r(R) \rangle$ y, de aquí tenemos:

$$\text{Fil}(A) = \langle F_1(R), F_2(R), \dots, F_m(R) \rangle = \langle F_1(R), F_2(R), \dots, F_r(R) \rangle$$

y obtenemos así que las filas no nulas de R generan $Fil(A)$.

Veamos ahora que $\{F_1(R), F_2(R), \dots, F_r(R)\}$ es un sistema libre, para ello tengamos en cuenta que la primera componente no nula de cada uno de estos vectores es 1 y ocupa una posición estrictamente posterior a la primera componente no nula de los vectores que le preceden, es decir, si la primera componente no nula de $F_i(R)$ está en la posición j_i , para $1 \leq i \leq r$, entonces ésta es 1 y además $j_1 < j_2 < \dots < j_r$. Por tanto, si consideramos una combinación nula de los vectores $\{F_1(R), F_2(R), \dots, F_r(R)\}$, comparando las componentes j_1, j_2, \dots, j_r de ambos miembros, tenemos:

$$\alpha_1 F_1(R) + \alpha_2 F_2(R) + \dots + \alpha_r F_r(R) = (0, 0, \dots, 0) \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$$

por lo que $\{F_1(R), F_2(R), \dots, F_r(R)\}$ es libre.

- 2) Sabemos que los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos $AX = O$ y $RX = O$ son equivalentes y tienen por tanto el mismo conjunto de soluciones. Si para cada j , con $1 \leq j \leq n$, representamos por $\overline{C_j(A)}$ la matriz columna cuyos términos son las componentes del vector $C_j(A) = (a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^m)$ de K^m y, análogamente, $\overline{C_j(R)} \in M_{m \times 1}(K)$ es la matriz columna cuyos términos son las componentes del vector $C_j(R) \in K^m$, entonces los sistemas de ecuaciones lineales $AX = O$ y $RX = O$ quedan expresados, respectivamente, de la forma siguiente:

$$x_1 \overline{C_1(A)} + x_2 \overline{C_2(A)} + \dots + x_n \overline{C_n(A)} = O \in M_{m \times 1}(K)$$

$$x_1 \overline{C_1(R)} + x_2 \overline{C_2(R)} + \dots + x_n \overline{C_n(R)} = O \in M_{m \times 1}(K)$$

Si suponemos que $rg A = r$, entonces el sistema $RX = O$ tiene exactamente r incógnitas principales y $n - r$ no principales. Sabemos también que el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $RX = O$ se obtiene expresando las incógnitas principales en función de las no principales, dando a éstas todos los valores posibles en el cuerpo K , por consiguiente, si suponemos que las incógnitas principales de $RX = O$ son $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ y las no principales son $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-r}}$, entonces:

- para la asignación de parámetros $x_{j_1} = 1, x_{j_2} = 0, \dots, x_{j_{n-r}} = 0$, obtenemos una solución del sistema $RX = O$, y por tanto de $AX = O$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$, tal que $\alpha_{j_1} = 1, \alpha_{j_2} = 0, \dots, \alpha_{j_{n-r}} = 0$, por lo que tenemos:

$$\alpha_1 \overline{C_1(A)} + \alpha_2 \overline{C_2(A)} + \dots + \alpha_n \overline{C_n(A)} = O$$

con $\alpha_{j_1} = 1, \alpha_{j_2} = 0, \dots, \alpha_{j_{n-r}} = 0$, de donde se deduce que:

$$\overline{C_{j_1}(A)} \in \langle \overline{C_{i_1}(A)}, \overline{C_{i_2}(A)}, \dots, \overline{C_{i_r}(A)} \rangle$$

y de aquí es inmediato que:

$$C_{j_1}(A) \in \langle C_{i_1}(A), C_{i_2}(A), \dots, C_{i_r}(A) \rangle$$

- análogamente, para la asignación de parámetros $x_{j_1} = 0, x_{j_2} = 1, \dots, x_{j_{n-r}} = 0$, obtenemos una solución de $RX = O$, y por tanto de $AX = O$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$, con $\alpha_{j_1} = 0, \alpha_{j_2} = 1, \dots, \alpha_{j_{n-r}} = 0$, de donde:

$$\alpha_1 \overline{C_1(A)} + \alpha_2 \overline{C_2(A)} + \dots + \alpha_n \overline{C_n(A)} = O$$

con $\alpha_{j_1} = 0, \alpha_{j_2} = 1, \dots, \alpha_{j_{n-r}} = 0$, y de aquí:

$$\overline{C_{j_2}(A)} \in \langle \overline{C_{i_1}(A)}, \overline{C_{i_2}(A)}, \dots, \overline{C_{i_r}(A)} \rangle$$

y también:

$$C_{j_2}(A) \in \langle C_{i_1}(A), C_{i_2}(A), \dots, C_{i_r}(A) \rangle$$

- procediendo de forma análoga para todas las posibles asignaciones de parámetros a las incógnitas no principales, de manera que exactamente a una de ellas le asignemos el escalar $1 \in K$ y $0 \in K$ a las demás, obtenemos finalmente:

$$\{C_{j_1}(A), C_{j_2}(A), \dots, C_{j_{n-r}}(A)\} \subseteq \langle C_{i_1}(A), C_{i_2}(A), \dots, C_{i_r}(A) \rangle$$

Y de aquí es inmediato que:

$$Col(A) = \langle C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A) \rangle = \langle C_{i_1}(A), C_{i_2}(A), \dots, C_{i_r}(A) \rangle$$

por lo que las columnas de A que en R pasan a ser las columnas que contienen a los 1 pivote, y que son las que en el sistema $RX = O$ corresponden a las incógnitas principales, generan $Col(A)$. Falta sólo comprobar que forman también un sistema libre, para ello, consideremos:

$$\alpha_{i_1} C_{i_1}(A) + \alpha_{i_2} C_{i_2}(A) + \dots + \alpha_{i_r} C_{i_r}(A) = (0, 0, \dots, 0)$$

de donde también se tiene que:

$$\alpha_{i_1} \overline{C_{i_1}(A)} + \alpha_{i_2} \overline{C_{i_2}(A)} + \dots + \alpha_{i_r} \overline{C_{i_r}(A)} = O$$

y en consecuencia, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$, con $\alpha_{j_1} = \alpha_{j_2} = \dots = \alpha_{j_{n-r}} = 0$, es solución del sistema $AX = O$ y por consiguiente también lo es de $RX = O$. Por otro lado, en cada solución del sistema homogéneo $RX = O$, sabemos que las componentes correspondientes

a las incógnitas principales vienen expresadas en función de las correspondientes a las no principales, que en esta solución son todas nulas. Por consiguiente también se tiene:

$$\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \dots = \alpha_{i_r} = 0$$

lo que justifica que el sistema $\{C_{i_1}(A), C_{i_2}(A), \dots, C_{i_r}(A)\}$ es libre.

□

Corolario 8.3. Para toda matriz $A \in M_{m \times n}(K)$, se verifica:

- 1) $rg A = \dim_K Fil(A) = rg \{F_1(A), F_2(A), \dots, F_m(A)\}$
- 2) $rg A = \dim_K Col(A) = rg \{C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)\}$
- 3) $rg A = rg A^T$

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Sabemos que $rg A$ es el número de filas no nulas de $R = Fer(A)$ y, en la proposición anterior hemos comprobado que éstas forman base de $Fil(A)$ por lo que $rg A = \dim_K Fil(A)$. La otra igualdad es consecuencia de la definición de rango de un sistema de vectores.
- 2) También sabemos que el número de columnas con 1 pivote en la forma escalonada reducida, R , de una matriz A , coincide con $rg A$. Por consiguiente, de la proposición anterior se deriva que $rg A$ coincide con $\dim_K Col(A)$ y esta dimensión es igual al rango del sistema de vectores $\{C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)\}$.
- 3) Teniendo en cuenta que las columnas de A son las filas de A^T , y haciendo uso del apartado anterior, se tiene:

$$rg A = \dim_K Col(A) = \dim_K Fil(A^T) = rg A^T$$

□

Corolario 8.4. Para una matriz cuadrada $A \in M_n(K)$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) A es inversible.
- 2) Todo SEL de la forma $AX = B$ es compatible determinado.
- 3) $rg A = n$.
- 4) $Fer(A) = I_n$.
- 5) A es producto de matrices elementales.
- 6) $|A| \neq 0$.
- 7) $\{F_1(A), F_2(A), \dots, F_n(A)\}$ es un sistema libre de K^n .
- 8) $\{C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)\}$ es un sistema libre de K^n .

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia entre las condiciones 1), 2), 3), 4) y 5) la vimos en el capítulo 1. La equivalencia entre las condiciones 1) y 6) la vimos en el capítulo 2. Por otro lado, haciendo uso del corolario anterior, tenemos que:

$$\{F_1(A), F_2(A), \dots, F_n(A)\} \text{ es un sistema libre de } K^n \iff$$

$$\iff \dim_K \text{Fil}(A) = n \iff \text{rg } A = n$$

lo que nos da la equivalencia entre 3) y 7). Análogamente:

$$\{C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)\} \text{ es un sistema libre de } K^n \iff$$

$$\iff \dim_K \text{Col}(A) = n \iff \text{rg } A = n$$

lo que nos da la equivalencia entre 3) y 8). □

Ejemplo 8.5. Con el siguiente ejemplo, pretendemos mostrar cómo resolver algunas cuestiones del K -espacio vectorial K^n haciendo uso de la proposición 8.2.

En \mathbb{R}^5 como \mathbb{R} -espacio vectorial, consideremos el sistema de vectores $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, donde se tiene $v_1 = (0, 5, -3, 8, -1)$, $v_2 = (2, -1, 1, 2, 1)$, $v_3 = (-4, 7, -5, 4, -3)$, $v_4 = (1, -3, 2, -3, 1)$, $v_5 = (2, 3, -1, 5, 0)$ y $v_6 = (3, -3, 3, -1, 2)$. Se pide:

1. Calcular $\text{rg } S$ y obtener una base de $\langle S \rangle$ contenida en S .
2. Ampliar la base obtenida de $\langle S \rangle$, con vectores de la base canónica, hasta una base de \mathbb{R}^5 .
3. Comprobar si los vectores $u = (-3, -3, 1, -5, 0)$ y $v = (3, 2, 0, 1, 1)$ pertenecen a $\langle S \rangle$ y, en caso afirmativo, obtener sus coordenadas en la base hallada de $\langle S \rangle$.
4. Obtener la condición o condiciones que deben cumplir las componentes de un vector genérico de \mathbb{R}^5 , $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, para que pertenezca a $\langle S \rangle$.
5. Obtener una base del espacio vectorial cociente $\mathbb{R}^5 / \langle S \rangle$ y las coordenadas de $u + \langle S \rangle$ y de $v + \langle S \rangle$ en dicha base.

=====

1. De acuerdo con la proposición 8.2, si construimos la matriz A que tiene por columnas los vectores de S , tendremos $\langle S \rangle = \text{Col}(A)$ y por consiguiente las columnas de A que pasan a ser las columnas que contienen a los 1 pivote en $\text{Fer}(A)$ formarán base de $\langle S \rangle$ y obtendremos simultáneamente una base de $\langle S \rangle$ contenida en S y $\text{rg } S$. Consideremos pues

la siguiente matriz A y calculemos su forma escalonada reducida $Fer(A)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 7 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \quad Fer(A) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & \underline{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & -2 & \underline{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la matriz $Fer(A)$ hemos señalado los 1 pivote subrayándolos y, de lo antes expuesto, deducimos que el conjunto $\{v_1, v_2, v_5, v_6\} \subseteq S$ es base de $\langle S \rangle$ y que $rg S = 4$. Los otros dos vectores, v_3 y v_4 , corresponden a las incógnitas no principales del sistema $Fer(A)X = O$. Además, el conjunto de soluciones de los sistemas $AX = O$ y $Fer(A)X = O$, está formado por los elementos $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \in \mathbb{R}^6$ tales que:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda + \frac{1}{2}\mu \\ 2\lambda - \frac{1}{2}\mu \\ \lambda \\ \mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

y coincide a su vez con el conjunto de elementos $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \in \mathbb{R}^6$ tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \alpha_5 v_5 + \alpha_6 v_6 = 0$$

ya que los vectores v_i constituyen las columnas de A , por consiguiente:

$$(-\lambda + \frac{1}{2}\mu)v_1 + (2\lambda - \frac{1}{2}\mu)v_2 + \lambda v_3 + \mu v_4 = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Para los dos casos $\lambda = 1$ y $\mu = 0$, y $\lambda = 0$ y $\mu = 1$, obtenemos:

$$-v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + v_4 = 0$$

lo que nos permite escribir los dos vectores que no forman parte de la base obtenida, v_3 y v_4 , como combinación lineal de la base hallada de $\langle S \rangle$, expresiones que denominamos *relaciones de dependencia de S* , es decir:

$$v_3 = v_1 - 2v_2 \quad \text{y} \quad v_4 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$$

Notemos finalmente que, en estas expresiones, las coordenadas de los vectores v_3 y v_4 , respecto de la base hallada de $\langle S \rangle$, (v_1, v_2, v_5, v_6) , se corresponden con los términos de las columnas tercera y cuarta de $Fer(A)$.

2. Para ampliar la base hallada de $\langle S \rangle$, con vectores de la base canónica, hasta una base de \mathbb{R}^5 , hemos de encontrar un vector de la base canónica, e_i , con $1 \leq i \leq 5$, de manera que el sistema $\{v_1, v_2, v_5, v_6, e_i\}$ sea libre. Usando el mismo razonamiento que hemos seguido en el apartado anterior, podemos construir las 5 matrices que tienen a estos vectores por columnas y calcular sus correspondientes formas escalonadas reducidas. Planteado así, obtenemos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad Fer(A_1) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde deducimos que $\{v_1, v_2, v_5, v_6, e_1\}$ no es base de \mathbb{R}^5 . En particular, del análisis de $Fer(A_1)$, deducimos que:

$$\lambda v_1 - \lambda v_2 - \lambda v_5 + \lambda v_6 + \lambda e_1 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

y de aquí:

$$e_1 = -v_1 + v_2 + v_5 - v_6$$

y, tal y como hemos hecho notar anteriormente, las coordenadas de e_1 en la base (v_1, v_2, v_5, v_6) de $\langle S \rangle$, se corresponden con los términos de su correspondiente columna en $Fer(A_1)$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad Fer(A_2) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde deducimos que $\{v_1, v_2, v_5, v_6, e_2\}$ no es base de \mathbb{R}^5 . En particular, del análisis de $Fer(A_2)$, deducimos que:

$$-\frac{1}{2}\lambda v_1 + \frac{3}{2}\lambda v_2 - \lambda v_6 + \lambda e_2 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

y de aquí:

$$e_2 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 + v_6$$

y, tal y como hemos hecho notar anteriormente, las coordenadas de e_2 en la base (v_1, v_2, v_5, v_6) de $\langle S \rangle$, se corresponden con los términos de su correspondiente columna en $Fer(A_2)$.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad Fer(A_3) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix}$$

de donde deducimos que $\{v_1, v_2, v_5, v_6, e_3\}$ sí que es base de \mathbb{R}^5 y no necesitamos continuar.

En orden a no tener que repetir varias veces el mismo proceso, podemos directamente plantear la matriz que tenga por columnas los vectores $v_1, v_2, v_5, v_6, e_1, e_2, e_3, e_4$ y e_5 y en este orden ya que, teniendo en cuenta cómo se obtiene la forma escalonada reducida de una matriz, esto nos va a permitir obtener los 5 primeros de estos vectores que forman base de \mathbb{R}^5 , que es nuestro objetivo. Más aún, podemos plantearlo considerando todos los vectores de S y resolver simultáneamente este apartado y el apartado anterior, es decir:

$$B = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 0 & 2 & -4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & -3 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & -3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Fer(B) = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} \underline{1} & 0 & 1 & \underline{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{23}{10} \\ 0 & \underline{1} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & \underline{-\frac{3}{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \underline{-\frac{7}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & \underline{-\frac{1}{5}} & \underline{-\frac{8}{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & -1 & 1 & 0 & \underline{-\frac{1}{5}} & \underline{\frac{17}{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & \frac{1}{5} & \underline{-\frac{7}{5}} \end{array} \right]$$

de donde deducimos que $\{v_1, v_2, v_5, v_6, e_3\}$ es libre. Además, las soluciones de $BX = O$ y $Fer(B)X = O$, son los elementos $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}) \in \mathbb{R}^{11}$ tales que:

$$\blacksquare \text{ Incógnitas no principales: } \begin{cases} \alpha_3 = \lambda_1 \\ \alpha_4 = \lambda_2 \\ \alpha_7 = \lambda_3 \\ \alpha_8 = \lambda_4 \\ \alpha_{10} = \lambda_5 \\ \alpha_{11} = \lambda_6 \end{cases} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \text{ Incógnitas principales: } \begin{cases} \alpha_1 &= -\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_3 - \frac{1}{2}\lambda_4 - \frac{1}{10}\lambda_5 - \frac{23}{10}\lambda_6 \\ \alpha_2 &= 2\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \lambda_3 + \frac{3}{2}\lambda_4 - \frac{1}{2}\lambda_5 + \frac{7}{2}\lambda_6 \\ \alpha_5 &= -\lambda_3 + \frac{1}{5}\lambda_5 + \frac{8}{5}\lambda_6 \\ \alpha_6 &= \lambda_3 - \lambda_4 + \frac{1}{5}\lambda_5 - \frac{17}{5}\lambda_6 \\ \alpha_9 &= -\frac{1}{5}\lambda_5 + \frac{7}{5}\lambda_6 \end{cases}$$

y coincide a su vez con los elementos $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}) \in \mathbb{R}^{11}$ tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \alpha_5 v_5 + \alpha_6 v_6 + \alpha_7 e_1 + \alpha_8 e_2 + \alpha_9 e_3 + \alpha_{10} e_4 + \alpha_{11} e_5 = 0$$

ya que los vectores $v_1, \dots, v_6, e_1, \dots, e_5$ constituyen las columnas de B .

Por consiguiente, particularizando a los casos siguientes, tenemos:

- Para $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$, entonces $v_1 - 2v_2 - v_3 = 0$ y por consiguiente:

$$v_3 = v_1 - 2v_2$$

- Para $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$, entonces $-\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - v_4 = 0$ y por consiguiente:

$$v_4 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$$

- Para $\lambda_3 = -1$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$, entonces $-v_1 + v_2 + v_5 - v_6 - e_1 = 0$ y por consiguiente:

$$e_1 = -v_1 + v_2 + v_5 - v_6$$

- Para $\lambda_4 = -1$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$, entonces $\frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 + v_6 - e_2 = 0$ y por consiguiente:

$$e_2 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 + v_6$$

En consecuencia, $\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ es base de $\langle S \rangle$ ya que forma un sistema libre y los otros dos vectores de S son combinación lineal de estos. Además $\{v_1, v_2, v_5, v_6, e_3\}$ es base de \mathbb{R}^5 conteniendo la base hallada de $\langle S \rangle$.

3. Teniendo en cuenta la proposición 4.6, página 74, comprobar si $u \in \langle S \rangle$ equivale a comprobar si el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_5, v_6, u\}$ es ligado, para ello podemos considerar la

matriz que tiene a estos vectores por columnas y analizar su rango, es decir:

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & -3 \\ 5 & -1 & 3 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 5 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} ; \quad Fer(A_u) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en consecuencia tenemos que $u \in \langle S \rangle$ y, analizando como antes las soluciones de los sistemas $A_u X = O$ y $Fer(A_u)X = O$, deducimos que:

$$-\lambda v_1 + \lambda v_2 + 2\lambda v_5 - \lambda v_6 + \lambda u = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

de donde:

$$u = v_1 - v_2 - 2v_5 + v_6$$

y como consecuencia, sus coordenadas en la base (v_1, v_2, v_5, v_6) de $\langle S \rangle$ son $(1, -1, -2, 1)$. (Notemos que un vector de $\langle S \rangle$, aunque tenga 5 componentes como vector que es de \mathbb{R}^5 , tiene 4 coordenadas en la base hallada de $\langle S \rangle$ puesto que $\langle S \rangle$ es de dimensión 4).

De forma análoga, para comprobar si v pertenece o no a $\langle S \rangle$, procedemos como sigue:

$$A_v = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 3 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} ; \quad Fer(A_v) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix}$$

por consiguiente $v \notin \langle S \rangle$.

Otra forma de plantearlo es tener en cuenta que $\{v_1, v_2, v_5, v_6, e_3\}$ es base de \mathbb{R}^5 y por consiguiente cualquier vector de \mathbb{R}^5 es combinación lineal de estos vectores, pero los vectores de $\langle S \rangle$ son exactamente aquellos que, expresados en función de esta base, el coeficiente de e_3 es 0, es decir:

$$A'_u = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 3 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 5 & -1 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad Fer(A'_u) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \end{bmatrix}$$

por consiguiente, de aquí se tiene:

$$-\lambda v_1 + \lambda v_2 + 2\lambda v_5 - \lambda v_6 + \lambda u = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

de donde deducimos:

$$u = v_1 - v_2 - 2v_5 + v_6 \in \langle S \rangle$$

y las coordenadas de u en la base (v_1, v_2, v_5, v_6) de $\langle S \rangle$ son $(1, -1, -2, 1)$.

$$A'_v = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \text{Fer}(A'_v) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

por consiguiente, de aquí se tiene:

$$-\frac{2}{5}\lambda v_1 + 3\lambda v_2 - \frac{6}{5}\lambda v_5 - \frac{11}{5}\lambda v_6 + \frac{6}{5}\lambda e_3 + \lambda v = 0$$

y por tanto:

$$v = \frac{2}{5}v_1 - 3v_2 + \frac{6}{5}v_5 + \frac{11}{5}v_6 - \frac{6}{5}e_3$$

4. Obviamente, los vectores de $\langle S \rangle$ son aquellos que pueden expresarse como combinación lineal de una cualquiera de las bases de $\langle S \rangle$, en particular, si $w = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, las siguientes condiciones equivalentes caracterizan a los vectores que pertenecen a $\langle S \rangle$:

$$\begin{aligned} w \in \langle S \rangle &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} / w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_5 + \lambda_4 v_6 \iff \\ &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} / w = \lambda_1(0, 5, -3, 8, -1) + \lambda_2(2, -1, 1, 2, 1) + \lambda_3(2, 3, -1, 5, 0) + \lambda_4(3, -3, 3, -1, 2) = \\ &= (2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4, 5\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 - 3\lambda_4, -3\lambda_1 + \lambda_2 - 1\lambda_3 + 3\lambda_4, 8\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 - 1\lambda_4, -1\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4) \iff \\ &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} / \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \iff \\ &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} / \begin{cases} x_1 = 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 \\ x_2 = 5\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 - 3\lambda_4 \\ x_3 = -3\lambda_1 + \lambda_2 - 1\lambda_3 + 3\lambda_4 \\ x_4 = 8\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 - 1\lambda_4 \\ x_5 = -1\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Esta última condición se conoce como *sistema de ecuaciones paramétricas del subespacio* $\langle S \rangle$.

Por otro lado, notemos que el último planteamiento hecho en el apartado anterior, nos proporciona también otro mecanismo para caracterizar cuándo un elemento arbitrario de \mathbb{R}^5 , $w = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, pertenece a $\langle S \rangle$. En efecto, si consideramos la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & x_1 \\ 5 & -1 & 3 & -3 & 0 & x_2 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & 1 & x_3 \\ 8 & 2 & 5 & -1 & 0 & x_4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & x_5 \end{bmatrix}$$

y calculamos $Fer(M)$, tenemos:

$$Fer(M) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-10x_1+5x_2+x_4+23x_5}{10} \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{2x_1-3x_2+x_4-7x_5}{2} \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 & \frac{5x_1-x_4-8x_5}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & \frac{-5x_1+5x_2-x_4+17x_5}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & \frac{5x_3+x_4-7x_5}{5} \end{bmatrix}$$

y de aquí se tiene:

$$\begin{aligned} & -\frac{-10x_1+5x_2+x_4+23x_5}{10}\lambda v_1 - \frac{2x_1-3x_2+x_4-7x_5}{2}\lambda v_2 - \frac{5x_1-x_4-8x_5}{5}\lambda v_5 \\ & -\frac{-5x_1+5x_2-x_4+17x_5}{5}\lambda v_6 - \frac{5x_3+x_4-7x_5}{5}\lambda e_3 + \lambda w = 0 \end{aligned}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} w = & \frac{-10x_1+5x_2+x_4+23x_5}{10}v_1 + \frac{2x_1-3x_2+x_4-7x_5}{2}v_2 + \frac{5x_1-x_4-8x_5}{5}v_5 \\ & + \frac{-5x_1+5x_2-x_4+17x_5}{5}v_6 + \frac{5x_3+x_4-7x_5}{5}e_3 \end{aligned}$$

por lo que:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \langle S \rangle \iff \frac{5x_3+x_4-7x_5}{5} = 0 \iff 5x_3+x_4-7x_5 = 0$$

ecuación que denominamos *ecuación no paramétrica* del subespacio $\langle S \rangle$ (o *sistema de ecuaciones no paramétricas* en caso de que hubiera habido más de una).

Este planteamiento nos permite también dar respuesta a lo visto en el apartado anterior particularizando a los vectores $u = (-3, -3, 1, -5, 0)$ y $v = (3, 2, 0, 1, 1)$

Notemos finalmente que el número de ecuaciones no paramétricas del subespacio $\langle S \rangle$ coincide con $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^5 - \dim_{\mathbb{R}} \langle S \rangle$ y el número de ecuaciones paramétricas es $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^5$ pero con $\dim_{\mathbb{R}} \langle S \rangle$ parámetros.

5. De acuerdo con lo visto en 6.7, página 81, $\{e_3 + \langle S \rangle\}$ es base de $\mathbb{R}^5 / \langle S \rangle$. Además, como $u \in \langle S \rangle$, se tiene que $u + \langle S \rangle = 0 + \langle S \rangle = \langle S \rangle$ y por consiguiente su única coordenada es 0. Por otro lado, de:

$$v = \frac{2}{5} v_1 - 3v_2 + \frac{6}{5} v_5 + \frac{11}{5} v_6 - \frac{6}{5} e_3$$

se tiene que:

$$v - \left(\frac{-6}{5} e_3\right) \in \langle S \rangle \implies v + \langle S \rangle = \frac{-6}{5} e_3 + \langle S \rangle = \frac{-6}{5} (e_3 + \langle S \rangle)$$

por consiguiente la coordenada de $v + \langle S \rangle$ en la base $\{e_3 + \langle S \rangle\}$ de $\mathbb{R}^5 / \langle S \rangle$ es $\frac{-6}{5}$.

Notemos finalmente que, de acuerdo con todo lo expuesto, todos los apartados del problema pueden ser contestados partiendo simplemente del análisis de la forma escalonada reducida de la siguiente matriz:

$$N = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 0 & 2 & -4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & -3 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & -3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}$$

$$Fer(N) = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} \underline{1} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{23}{10} \\ 0 & \underline{1} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{-10x_1+5x_2+x_4+23x_5}{10} \\ \frac{2x_1-3x_2+x_4-7x_5}{2} \\ \frac{5x_1-x_4-8x_5}{5} \\ \frac{-5x_1+5x_2-x_4+17x_5}{5} \\ \frac{5x_3+x_4-7x_5}{5} \end{array}$$

Nota 8.6. Todas las matrices planteadas en el ejemplo anterior, excepto la matriz M del apartado 4) y la matriz N del resumen final, son matrices numéricas, si bien en estos dos casos, hay cinco columnas previas a la columna no numérica, que forman un sistema libre, por consiguiente, el cálculo de la forma escalonada reducida en estos dos casos, no requiere ninguna operación elemental que suponga multiplicar por algún escalar del tipo x_i^{-1} , y no necesitamos analizar por separado el caso en que $x_i = 0$. Por consiguiente, para el cálculo de la forma escalonada reducida de todas y cada una de las matrices consideradas, puede ser utilizado algún paquete informático.

Algunos paquetes que permiten el cálculo de la forma escalonada reducida de una matriz son *Derive*, *Matlab* o *Mathematica*. No obstante, hay que tener en cuenta que tanto el *Derive* como el *Mathematica* son programas de cálculo simbólico y permiten el cálculo de la forma escalonada reducida de matrices no numéricas como las matrices M y N utilizadas en el ejemplo anterior, pero esto no es

posible con el programa *Matlab*. Igualmente, el *Derive* y el *Mathematica* dan cálculos exactos en forma de cociente de enteros, mientras que el *Matlab* proporciona los cálculos en forma decimal, expresando por ejemplo el racional $\frac{1}{3}$ como 0,3333, lo que, según el problema que nos interese calcular, puede no proporcionarnos la información que necesitemos.

En el ejemplo siguiente mostramos la instrucción que cada programa nos permite calcular la forma escalonada reducida de una matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$:

- Con *Derive*: ROW__REDUCE $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- Con *Matlab*: rref(C) = $\begin{bmatrix} 1,0000 & 0 & 0,3333 \\ 0 & 1,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}$
- Con *Mathematica*: RowReduce[C] = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Definición 8.7. Si $A \in M_{m \times n}(K)$, denominamos *submatriz* de A a toda matriz que resulta de eliminar filas y/o columnas de A . Asimismo, a los determinantes de las submatrices cuadradas de A los denominaremos *menores de A* . En particular, al determinante de una submatriz cuadrada de A con r filas y columnas, lo denominaremos *menor de orden r de A* .

Proposición 8.8. Si $A \in M_{m \times n}(K)$ y $A \neq O$, entonces $rg A$ coincide con el máximo de los órdenes de los menores no nulos de A .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$ y $rg A = r$, pretendemos demostrar que:

- 1) Todo menor de orden p de A , con $p > r$, es cero.
- 2) A tiene algún menor no nulo de orden r .

En efecto:

- 1) Consideremos la submatriz cuadrada de A , $M \in M_p(K)$, resultado de haber eliminado en A todas las columnas excepto $C_{j_1}(A), C_{j_2}(A), \dots, C_{j_p}(A)$, con $j_1 < j_2 < \dots < j_p$, y todas las filas excepto $F_{i_1}(A), F_{i_2}(A), \dots, F_{i_p}(A)$, con $i_1 < i_2 < \dots < i_p$. Por consiguiente tenemos:

$$M = \begin{bmatrix} a_{j_1}^{i_1} & a_{j_2}^{i_1} & \dots & a_{j_p}^{i_1} \\ a_{j_1}^{i_2} & a_{j_2}^{i_2} & \dots & a_{j_p}^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^{i_p} & a_{j_2}^{i_p} & \dots & a_{j_p}^{i_p} \end{bmatrix}$$

Pretendemos comprobar que, por ser $p > r$, necesariamente se tiene $|M| = 0$. En efecto, del corolario 8.3 se deduce que el sistema de vectores de K^m , $\{C_{j_1}(A), C_{j_2}(A), \dots, C_{j_p}(A)\}$, es ligado, y por tanto $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in K^p$, con $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \neq (0, 0, \dots, 0)$, de manera que:

$$\alpha_1 C_{j_1}(A) + \alpha_2 C_{j_2}(A) + \dots + \alpha_p C_{j_p}(A) = (0, 0, \dots, 0)$$

lo que, escrito en forma matricial, queda:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} a_{j_1}^1 \\ a_{j_1}^2 \\ \vdots \\ a_{j_1}^n \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{j_2}^1 \\ a_{j_2}^2 \\ \vdots \\ a_{j_2}^n \end{bmatrix} + \dots + \alpha_p \begin{bmatrix} a_{j_p}^1 \\ a_{j_p}^2 \\ \vdots \\ a_{j_p}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

y de aquí es inmediato que también se verifica:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} a_{j_1}^{i_1} \\ a_{j_1}^{i_2} \\ \vdots \\ a_{j_1}^{i_p} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{j_2}^{i_1} \\ a_{j_2}^{i_2} \\ \vdots \\ a_{j_2}^{i_p} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_p \begin{bmatrix} a_{j_p}^{i_1} \\ a_{j_p}^{i_2} \\ \vdots \\ a_{j_p}^{i_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

pero de aquí deducimos que el sistema de vectores de K^p formado por las columnas de M , $\{C_1(M), C_2(M), \dots, C_p(M)\}$, es ligado, y haciendo uso del corolario 8.4 tenemos que $|M| = 0$.

2) Supongamos que $\{C_{j_1}(A), C_{j_2}(A), \dots, C_{j_r}(A)\}$ es base de $Col(A)$. Sabemos que $r \leq m$ y, para la demostración, distinguiremos los dos casos siguientes:

- Si $r = m$: En este caso la siguiente matriz es una submatriz cuadrada de A , con r filas y columnas y cuyo sistema de columnas es libre, por tanto, como consecuencia del corolario 8.4, se tiene que su determinante es no nulo, justificando así la existencia de un menor no nulo de orden r de A :

$$M = \begin{bmatrix} a_{j_1}^1 & a_{j_2}^1 & \dots & a_{j_r}^1 \\ a_{j_1}^2 & a_{j_2}^2 & \dots & a_{j_r}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^m & a_{j_2}^m & \dots & a_{j_r}^m \end{bmatrix}$$

- Si $r < m$: De acuerdo con 5.9, página 78, el sistema libre $\{C_{j_1}(A), C_{j_2}(A), \dots, C_{j_r}(A)\}$ es posible ampliarlo, con vectores de la base canónica de K^m hasta una base de K^m , en consecuencia, $\exists i_1, i_2, \dots, i_{m-r}$, con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m-r} \leq m$ de manera que el sistema $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{m-r}}, C_{j_1}(A), C_{j_2}(A), \dots, C_{j_r}(A)\}$ es base de K^m . En consecuencia, la siguiente matriz será una matriz cuadrada con m filas y columnas y, puesto que el

sistema de sus columnas es libre, del corolario 8.4, sabemos que su determinante será no nulo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{j_1}^1 & a_{j_2}^1 & \cdots & a_{j_r}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{j_1}^{i_1} & a_{j_2}^{i_1} & \cdots & a_{j_r}^{i_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{j_1}^{i_2} & a_{j_2}^{i_2} & \cdots & a_{j_r}^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{j_1}^{i_{m-r}} & a_{j_2}^{i_{m-r}} & \cdots & a_{j_r}^{i_{m-r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{j_1}^m & a_{j_2}^m & \cdots & a_{j_r}^m \end{bmatrix}$$

Finalmente, de $|B| \neq 0$, y teniendo en cuenta el desarrollo del determinante de B por los términos de su primera columna, deducimos que el determinante de la submatriz que resulta de eliminar en B la primera columna y la i_1 -ésima fila, es no nulo. Pero si calculamos el determinante de esta nueva matriz también por los términos de su primera columna, deducimos que el determinante que resulta de eliminar en B las dos primeras columnas y sus filas i_1 -ésima e i_2 -ésima, es no nulo. Siguiendo este proceso, obtenemos que el determinante de la matriz que resulta de eliminar en B sus $m - r$ primeras columnas y sus filas i_1, i_2, \dots, i_{m-r} , es no nulo, además, notemos que ésta es una submatriz cuadrada de A con r filas y columnas, quedando así justificada la existencia de un menor no nulo de A de orden r .

□

Nota 8.9. Si $A \in M_{m \times n}(K)$, de acuerdo con el corolario 8.3, página 91, de la proposición anterior, 8.8, página 101, y de la definición de rango de una matriz, vista en el capítulo 1, se verifican las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} rgA = rgA^T &= \text{número de filas no nulas de } Fer(A) = \text{número de 1 principales en } Fer(A) = \\ &= \dim_K Col(A) = \dim_K Fil(A) = \text{máximo de los órdenes de los menores no nulos de } A \end{aligned}$$